ISSN 0185-6200

MATHESIS

Vol. V . *No. 4* . *Noviembre de 1989*

filosofía e historia de las matemáticas

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Mathesis

Revista de investigación, divulgación e información en Filosofía e Historia de las Matemáticas

Volumen V, Número 4, noviembre de 1989

Contenido

editorial 495

artículos

Louis Couturat. Hacia la logística 497
Jaques Herbrand. Las bases de la logística hilbertiana . . 543
Albert Lautman. Matemáticas y realidad 557
Jean Cavaillès y Albert Lautman. El pensamiento matemático 561
Jean Cavaillès. Matemáticas y formalismo 579

autores 585

créditos 591

información para autores

artículos por publicar

Editorial

Este número de *Mathesis* está consagrado a un tema fundamental: a la filosofía matemática tal y como se gestó en Francia, desde Louis Couturat hasta Jean Cavaillès.

Ciertamente, los cuatro autores que hemos seleccionado no agotan la inmensa producción francesa en torno de la filosofía de las matemáticas. Autores de la talla de Poincaré, por citar un ejemplo, han sido excluídos. La razón, en este caso, ha sido nuestro romanticismo militante. La selección, así, se ha hecho con un criterio extraño: en todos los casos, se trata de matemáticos y filosófos que murieron de manera trágica e inesperada: Galois en un duelo, Couturat y Herbrand en sendos accidentes, Lautman y Cavaillès fusilados por los nazis. Sin embargo, nuestra decisión también puede ser racionalizada. Herbrand, Lautman y Cavaillès trabajaron juntos y en la misma época; los tres —con Couturat— son los introductores de la lógica matemática en Francia y los tres - sin Couturat - son responsables de la noción de *filosofía matemática* como sustituto, no solamente nominal, de la *filosofía de las matemáticas* tradicional.

La noción, perdida tras la II Guerra Mundial, ha sido incapaz, durante más de 30 años, de abrirse paso, ni siquiera en Francia. Los colegas, camaradas y condiscípulos de Herbrand, Lautman y Cavaillès la abandonaron en nombre del proyecto Bourbaki si bien, buena parte de los fundadores de ésta empresa tuvieron un enorme respeto por los tres,: Chevalley fue condiscípulo da Lautman y de Herbrand en la Escuela Normal Superior. En este número se presenta el elogio que Lautman y Chevalley hicieron de Herbrand a la muerte de éste. (Véase la sección de autores.)

Cartan, también en la Normal, fue compañero de Cavaillès. El propio Cartan ha admitido que la influencia de Cavaillès, y posteriormente su ausencia, fueron de gran importancia en la formación y destino del grupo Bourbaki.

Ehresmann, otro de los fundadores del grupo Bourbaki, aparece también vinculado a los tres autores mencionados. En la polé-

mica que siguió a la presentación, casi simultánea, de las tesis de Lautman y Cavaillés, interviene de manera importante.

En todo caso, los tres, cuyos trabajos son difíciles de encontrar y, cuando se les encuentra, más difíciles de entender, construyen, cada cual a su manera, una nueva manera de hacer filosofía de las matemáticas. En pocas palabras, se trata de sustituir una filosofía que pretende regir el devenir de las matemáticas por una filosofía sometida al desarrollo efectivo de la práctica matemática. Las consecuencias, como se ve en los textos, son de una importancia enorme.

Se ha incluído, también, a Louis Couturat, introductor del logicismo en Francia en contra de Poincaré quien dictaba, por aquel entonces, las normas del quehacer matemático. En esta actitud iconoclasta, no podía faltar,en modo alguno, Evariste Galois, normaliano como todos los otros y cuya historia es harto conocida.

La lección, como ya la apuntaba Galois, debe ser clara: los matemáticos son hombres de su época. Los compromisos y las polémicas —y hemos escogido los textos más polémicos— nos muestran que finalmente, la lucha por la verdad es una batalla interminable, que no cesa y en la que jamás hay victorias ni derrotas, que se puede dar en frentes diversos y en contextos diversos pero que, después de todo, es el resultado del quehacer de una inteligencia crítica y de una pasión desbordada. Esto, al menos, es lo que debiéramos rescatar para las batallas de nuestra propio tiempo.

Hacia la logística (Respuesta a Poincaré)

Louis Cuturat

Agradezco al señor Poincaré el honor que me hace al tomarme en cuenta en sus artículos sobre *Matemáticas y lógica*, sin embargo, debo declarar que no merezco este honor pues las ideas que yo he expuesto aquí no son mías y temo que Poincaré cometerá un gran error al discutirlas según un trabajo de segunda mano. En efecto, y he tenido la precaución de prevenir a los lectores de la *Revue*, mis artículos[1] no presentan, en principio, sino una reseña del libro de Russell y si he sido llevado, a continuación, a examinar el trabajo de otros lógicos, no he dejado de citarlos y de referirme a ellos. Ahora bien, no es habitual criticar este tipo de obras después de un simple análisis, sobre todo cuando el valor de éstas obras reside en el rigor de las demostraciones y que estas demostraciones están ausentes en mi exposición sumaria. Por ejemplo, he analizado las largas memorias de Peano, Pieri y Whitehead limitándome a enunciar los teoremas esenciales sin citar una sola demostración y se sobreentiende constantemente que el lector que desee la demostración de tal o cual teorema no tiene sino que referirse a las memorias originales, sería evidentemente injusto reprocharme el que no las halla dado. Por lo mismo, he creído tener que exponer en mi libro (para completar uno de mis artículos) la *curva* de Peano *que llena el espacio* y ello, en forma elemental e intuitiva, accesible al primero que llegue y sin hablar de la demostración analítica rigurosa. ¿Qué podría pensarse de un matemático que, sin conocer la curva excepto por mi exposición, se permitiera criticar la construcción, dudar de la exactitud de la demostración o incluso declarar que esta demostración no existe y que la proposición en cuestión yace exclusivamente en la intuición?

Mathesis, 5 (1989), 497-541

Había prevenido a mis lectores, igualmente, del hecho de que en mi exposición, sacrificaría el rigor a la claridad, no a la claridad *lógica* inseparable del rigor y que no se puede obtener excepto por medio del simbolismo logístico, sino a esa claridad vulgar que llamamos *intuición* y por la que Poincaré toma partido tan vehementemente. Hay que confesar que he sido muy mal recompensado por las concesiones que he hecho a la intuición pues Poincaré se aprovecha de ellas para reprocharme falta de rigor. En todo caso, he querido hacer la obra de un comentarista y de un vulgarizador y componer, para el uso de los profanos, una especie de introducción a las obras que estaba resumiendo. Es decir, que no era para Poincaré para quien escribía y no pretendía, tampoco enseñarle cosa alguna. En todo caso, un trabajo de este género puede servir bien (eso espero, al menos) para *enseñar* los elementos de las doctrinas en cuestión pero no puede servir de base suficiente para *criticarlos*. Para ser justa y eficaz, la crítica debe dirigirse a las obras originales en que me he inspirado. ¿Qué diría Poincaré si alguien se pusiera a discutir los *Principios de la Geometría* de Hilbert a partir del análisis, por más exacto y completo que sea, que él ha dado al público francés?

Podría mantenerme en estos comentarios prejudiciales y, posiblemente debiera hacerlo pues, si ya he comprometido a las doctrinas en cuestión por mi intento de vulgarización, me arriesgo a comprometerlas aún más al defenderlas en contra de un adversario como Poincaré. Si me empeño en hacerlo es, por un lado, porque ha plugido a Poincaré que yo sustituya a los maestros de la lógica y, por otro lado, porque éstos han creído que yo soy suficiente para la tarea y me han dejado el cuidado de justificarlos. Les agradezco su confianza pero es necesario que el lector sepa bien que si hay algo bueno y sólido en este trabajo, se lo debo a ellos y que todo lo endeble y defectuoso es mío. Si, por tanto, tengo éxito en justificar a la logística en contra de las críticas de Poincaré, tanto mejor, si no, será mi culpa y no se probará nada en su contra.

Antes que nada conviene no confundir la logística con lo que Poincaré llama "la lógica de Hilbert". Poincaré no hace esta confusión, pero muchos de sus lectores podrían hacerla al verlo asociar las dos doctrinas en una misma discusión y en una misma condena. Ahora bien, es necesario saber que Hilbert es completamente ajeno a la logística y que no ha usado jamás, para sus investigaciones ningún tipo de cálculo lógico. Si, por lo tanto, las críticas que Poincaré le dirige, son justas, no tienen nada que

ver con la logística; servirían, más bién, para probar la superioridad de ésta sobre el razonamiento verbal y de simple sentido común.

Es importante, también, prevenir un error histórico que podría suscitarse a partir de la siguiente frase de Poincaré: "lo que Hilbert había hecho para la geometría, otros han querido hacerlo para la aritmética y para el análisis" (p.816-7). Se podría creer, al leer esta frase, que los logísticos han atacado al análisis y a la aritmética *después* de los trabajos de Hilbert sobre la geometría e imitándole. Los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert son de 1899. Ahora bien, *diez años antes* (1889), Peano había publicado, no sólo sus *Arithmetices principia nova methodo exposita*, sino, también, *I Principi di Geometria logicamente esposti*, escritos ambos en el simbolismo que había inventado el año anterior. En 1891, publicaba, en la *Rivista di matematica* (t.I), dos artículos, *Sul concetto di numero* que contenían ya los cinco axiomas fundamentales de la aritmética; en 1894 publicaba, en la misma *Revue* (t. iv) la memoria *Sui fondamenti della ì Geometria* que ya he analizado en *Les Principes des Mathématiques*, cap. vi, (Geometría descriptiva). En fin, es en 1898 y 1899 que Pieri publica su reconstrucción lógica de la geometría proyectiva y de la geometría métrica en las *Memoires de l'Académie des Sciences* de Turin. Estas fechas bastan para probar que, si Hilbert no ha *querido* aprovechar los trabajos de los logísticos, estos no han *podido* aprovechar los suyos y no han tenido necesidad de su ejemplo, no solamente en análisis y aritmética sino en geometría misma. Poincaré comete una inexactitud histórica al atribuir a los "trabajos de Hilbert" el "triunfo" de la logística en geometría (p. 30). Con este propósito me gustaría constatar un hecho: en 1900 Hilbert elaboró para la aritmética, un sistema complicado de *dieciocho axiomas* (axiomas de relación, axiomas de computación, axiomas de orden, axioma de continuidad, axioma de integridad)[2] luego de que, durante once años, la aritmética se había edificado sobre *cinco* axiomas solamente (que Padoa redujo a cuatro en 1902). En fin, para dar a cada quien la justicia "cronológica" debida, debo recordar que desde 1884, Frege exponía, en *Grundlagen der Arithmetik*, la teoría del número entero que Russell ha adoptado, en principio, e intentaba mostrar que los principios de la aritmética son puramente lógicos (analíticos, segun Kant).

Poincaré escribe: "Esta invención de Peano se llama, ante todo, *pasigrafía*" y añade "nombre que define de manera muy exacta aquello de lo que se trata" (p. 822). La primera frase contiene un

error de hecho: Peano *jamás* llamó pasigrafía a su simbolismo lógico, le llamó, siempre *lógica matemática*.[3] Si nosotros le llamamos Logística es, primero que nada por lo equívoco de la expresión "lógica matemática" y, a continuación, no porque "este nombre nuevo implica el propósito de revolucionar la lógica" sino más bién, porque esta vieja y buena palabra, con la que Viéte designaba al álgebra, indica, por su etimología misma, el arte general de razonar y calcular y es en este sentido que fue empleada por Lambert en el siglo XVIII para designar su propio cálculo lógico.[4] Es Schroeder quien la llamó *pasigrafía* en una comunicación al Ier Congreso de matemáticos (Zurich, 1898) y, probablemente con intención peyorativa.[5] Ahora bien, esta palabra es del todo inexacta, a pesar de lo que diga Poincaré. Se llama pasigrafía a toda lengua universal escrita, simbólica o cifrada, como por ejemplo, al *Código internacional de signos marítimos*.[6] Yo mismo la he empleado, en otras ocasiones, cuando he hablado del simbolismo de Peano, pero he corregido inmediatamente: "un sistema de *pasigrafía* o, mejor aún, de *ideografía*"[7]: quiere decir que los símbolos traducen, no palabras o frases sino, directamente ideas. Concluía en ese mismo artículo diciendo: "se restringiría injustamente el valor del simbolismo de Peano si se ve en él una especie de estenografía. Es, también y sobre todo, un instrumento de análisis lógico, de deducción y de verificación" y recordaba a este fin, la *característica universal* de Leibniz. Es desconocer, entónces, enteramente, la naturaleza y la importancia de la logística el que no se vea en ella sino una pasigrafía.

En general, por lo demás, Poincaré habla de la Logística en el mismo tono en que se podría hablar de álgebra o de matemáticas en general... Dice, por ejemplo: "El elemento esencial de este lenguaje son ciertos signos algebráicos que representan las diferentes conjunciones: si, y, o, por lo tanto (donc). Que estos signos sean cómodos, es posible, pero que estén destinados a renovar toda la filosofía, es otra cosa. Es difícil admitir que la palabra si adquiere, cuando se escribe $\supset$, una virtud que no tenía cuando se escribe si" (p. 822). En primer lugar, no debemos creer que los símbolos logísticos se reducen a traducir literalmente algunas palabras,[8] el signo $\supset$ no traduce más *si* que *por lo tanto*, sino que expresa la idea misma de implicación; el signo, $\cup$, puede, en algunos casos, traducir *y* y, en otros, *o*. Inversamente, la palabra *y* no tiene el mismo sentido en los tres siguientes casos: "Pedro es rico *y* feliz", "Pedro *y* Pablo son ricos", "Pedro *y* Pablo son hermanos" *y*, en consecuen-

cia, no se traducira con el mismo símbolo logístico. Es por lo tanto del todo injusto considerar al nuevo lenguaje como una simple calca del lenguaje vulgar y, por tanto, sin ningún valor o utilidad propios.[9]

Poincaré cree que yo atribuyo al empleo de símbolos "una importancia exagerada que habría de extrañar al propio Peano" (p. 822). Puedo tranquilizarlo acerca de este punto: Peano me escribió en relación a esto: " Siempre he afirmado la importancia de la notación simbólica en toda proposición de las matemáticas, su gran utilidad en las cuestiones difíciles y delicadas y que es indispensable en el estudio de los principios. Esto está escrito en todos los tomos del *Formulario*." Por todos lados y siempre, insiste en le necesidad de expresar *enteramente en símbolos* toda proposición matemática y toda definición.[10]

Sea lo que fuere, hay quien, de la importancia del simbolismo, tiene una opinión tan "exagerada" como la mía y la de Peano: Leibniz quien ha llegado al punto de decir que los descubrimientos que hizo en matemáticas provienen únicamente del haber perfeccionado el empleo de símbolos y que la invención del cálculo infinitesimal no es más que un escalón de su Característica.[11] En efecto, se sabe que Leibniz no ha inventado las *ideas* infinitesimales solamente inventó un simbolismo para representarlas y un algoritmo para manipularlas. Se podría decir de él que "No ha hecho más que introducir dos signos nuevos, d y $\int$. Que sean signos cómodos, es bien posible pero que sean capaces de renovar toda la matemática es increíble. Lo mismo podría decirse del álgebra: "Consiste simplemente en representar por medio de signos las palabras *más, menos, multiplicado por, dividido por*. Pero no se ve en que consiste su progreso sobre la aritmética; es difícil admitir que la palabra más adquiere, cuando se escribe +, una virtud de la que carecía cuando se escribía más" Y, más aún, ¿es con palabras que se ha podido elaborar la teoría de ecuaciones y la de las formas algebráicas?

Poincaré alega todavía que "la pasigrafía no nos preserva del error" (p. 825). Sin duda, no más que las reglas del cálculo algebráico o aritmético nos preservan. ¿Se sigue de ello que son falsas o que debemos desconfiar de ellas? Por el hecho de cometer errores de adición, ¿hay que condenar las "cuatro reglas" e, incluso, las cifras y no contar sino con los dedos o con canicas? Los errores de razonamiento que un logístico pueda cometer no invalida el valor de la logística del mismo modo que los errores de cálculo no abro-

gan la certeza de la aritmética. Basta con que la logística permita razonar más facilmente y con más seguridad y con que permita descubrir con más facilidad las faltas de razonamiento; esto es, precisamente lo que hace. En este sentido, como decía Leibniz, se trata del arte de la infalibilidad: no que los logísticos sean infalibles sino que están menos expuestos al error que aquellos que se fían del buen sentido simple, es decir, de la intuición.

Por otra parte, Poincaré se hace de la logística una idea totalmente falsa al considerarla como un mecanismo del que la inteligencia puede ser excluída y se mofa de ella por medio de una comparación inexacta con la *piano logique* de Stanley Jevons (p. 816). Es necesario, por principio, saber que esta "piano lógica" concierne únicamente a la lógica de clases y que no lleva a cabo sino la parte menos importante y, en efecto, la más mecánica, de los razonamientos: su trabajo consiste en suprimir las clases elementales que están anuladas en virtud de las premisas. Pero deja pendiente todo el resto, a saber, por una parte, la "puesta en ecuaciones" del problema lógico y, por otra parte, la combinación de las clases subsistentes a manera de que se obtengan las consecuencias en la forma deseada. Asi, el álgebra de la lógica misma no se reduce a un mecanismo ciego. Esto es aún más verdadero de la lógistica que del álgebra de la lógica pues aquella es bastante menos "mecánica" que ésta.

Hay otra comparación desafortunada: "¿Las reglas de la lógica perfecta son toda la matemática? Es lo mismo que decir que todo el arte de jugar ajedrez se reduce a las reglas sobre el movimiento de las piezas" (p.817). Pero nadie ha pretendido jamás que toda la matemática se reduzca materialmente a la lógica, es decir, afirmar *que no hay nada más* en un tratado de matemáticas de lo que hay en un tratado de lógica. Sostenemos, solamente que todos los razonamientos matemáticos se efectúan en virtud, *solamente*, de las reglas de la lógica, del mismo modo que toda las partidas de ajedrez que se podrían jugar siguen siempre las reglas del juego...sin las que no valdrían nada. La comparación se revierte, por lo tanto, en contra de los adversarios de la logística pues ésta muestra como un pequeño número de elementos combinados según ciertas leyes fijas, pueden engendrar una variedad ilimitada de consecuencias. Se ha querido sostener que la logística pone frenos a la invención y, en su contra, se han reivindicado los derechos imprescriptibles del genio: ¿cómo podría evolucionar y progresar sin cesar la matemática si está condenada a apoyarse en un pequeño número de

principios y de "constantes lógicas"? Poincaré no utiliza esta argumentación y deja de lado la cuestión de la invención pero vemos bien cómo la teoría de las "constantes lógicas' le inspira una repugnancia instintiva y que toda tentativa por catalogar las nociones primeras y los principios de las matemáticas, le parece una pretensión insoportable y un atentado en contra de la "libertad" del científico. Es por esto que a la razón lógica y demostrativa opone el "instinto seguro" del inventor y la "geometría más profunda" que le guía (p.817). Este género de consideraciones está muy de moda: es de buen gusto, hoy, oponer a la lógica formal - que se califica desdeñosamente de "dialéctica", "abstracta" y "verbal" - la "lógica de la naturaleza y de la vida".

Aquí hay una confusión que es necesario disipar. Oponer la lógica al hecho psicológico de la invención es cometer las más burda *ignoratio elenchi*. La lógica no tiene porque inspirar la invención ni porque explicarla: se contenta con controlarla y *verificarla* en el sentido propio de la palabra (hacer verdadero). ¿Se reprocha, acaso, a la métrica el no producir el genio poético o a la ciencia de la armonía el no conferir genio musical?, ¿Se concluye, por eso, que las reglas de una y otra carecen de valor y de utilidad? En cuanto a la teoría de las "constantes lógicas" no restringe más la libertad del matemático inventor - al formular los principios y las nociones primeras sobre las que reposa toda su ciencia -que la libertad del poeta, la del músico o la del pintor al decirles: "No haréis nada excepto, tú, combinar las siete notas de la gama con sus accidentes; tú, los siete colores del espectro y tú, las 25 letras del alfabeto". He ahí, exactamente en qúe medida la Logística traba y corta las alas del genio. Que se cese de lanzar la invención a la cabeza de los lógicos, como si la invención pudiera ser contraria a la lógica. Por otra parte, este "instinto seguro", esta "geometría más profunda" que guían al inventor no son sino una forma inconsciente de la razón lógica y proceden según las mismas leyes. La razón que inventa es conforme, y en el fondo idéntica, a la razón que demuestra, sin la cual ésta no podría *verificar* los hallazgos de aquella; además, estos hallazgos no son, invenciones, es decir, no son *verdaderos* más que bajo esta condición. Es, por tanto y en definitiva, la conformidad a las leyes de la lógica "la única que alcanza el premio del edificio construído" (p.817)

Poincaré habla de la "lógica de Russell" y la opone a la lógica de Aristóteles como si Russell hubiera sido el primero que habría osado rebasar el campo de la lógica aristotélica. Parece tener, por

otra parte,una idea inexacta de ésteúltimo cuando dice: "La lógica de las proposiciones de Russell es el estudio de las leyes según las que se combinan las conjunciones si, y , o y la negación no. Es una extensión considerable de la lógica antigua" (p.826). Puedo asegurar a Poincaré que Aristóteles ya conocía las conjunciones si, *y*, o y la negación y que las tomó en cuenta en su Lógica. Todos los lógicos clásicos han conocido y estudiado los juicios hipotéticos (en donde figura si), copulativos (en donde figura *y*), disyuntivos (en donde figura *o*) y la Lógica clásica ha admitido siempre los juicios *negativos*. Si lo que Poincaré afirma es que Russell ha sido el primero en traducir estos juicios a símbolos y que los ha sometido a un algoritmo, se equivoca, por lo menos, por medio siglo: es a Boole (sin hablar de precursores) a quien corresponde este honor. No es, por lo tanto, Russell quien a "adjuntado" a la silogística "las conjunciones *y* y *o*" y que , así, habría "abierto un nuevo dominio para la lógica" (p.826).

Poincaré cree establecer una diferencia capital entre las dos lógicas al hacer notar que "los símbolos se multiplican y permiten combinaciones verdaderas *en un número que ya no es limitado*" y añade: "¿Se tiene derecho de hacer esta extensión en el sentido de la palabra *lógica*?" (p.828). Parece que, en fin, para él, la Lógica está caracterizada por el *número limitado* de combinaciones que admite. Lo que no vemos en ello es una diferencia radical. ¿En qué sentido, además, la vieja Lógica no admitía sino un número limitado de combinaciones?, ¿Se trata del número de modos válidos del silogismo? Pero, ¿la lógica moderna, no admite, también, un número limitado de tipos simples de razonamiento? ¿Se trata, por el contrario de la diversidad infinita de los razonamientos complejos que pueden obtenerse al combinar estos tipos? Pero, ¿la Lógica clásica no podía, asímismo, formar una infinidad de razonamientos al combinar los silogismos? En todo caso, las dos Lógicas tienen el mismo caracter y no difieren sino en minucias. Ademas, ¿en qúe medida el número es relevante en esta materia? Si un principio lógico es verdadero, principio que puede ser el del silogismo o cualquier otro, ¿no es capaz de justificar tanto un número infinito de razonamientos como un número finito? ¿Acaso su virtud "probante" se agotaría al cabo de n aplicaciones? En fin, ¿qué significa ese reproche contra la Lógica cuando se le acusa de admitir un número infinito de combinaciones y se le denuncia, por otra parte, por no tener sino un limitado número de principios? ¿No es, para la Lógica, como para la Geometría (según una frase céle-

bre), un título de gloria ser capaz de obtener, de un número tan pequeño de principios, un número tan grande de consecuencias? ¿En qué puede este hecho escandalizar a un matemático familiarizado con la increíble fecundidad de la Combinatoria?

Cuando Poincaré opone la antigua y la nueva Lógica y considera a ésta como una "extensión" enorme y posiblemente ilegítima de aquella, parece olvidar, con ello, que el *dominio* de una ciencia puede recibir una extensión, incluso considerable, sin que la *noción* y la definición de tal ciencia cambien. De otra manera, no se podría hablar del progreso de las ciencias pues ello supondría que una ciencia permanece, en esencia, idéntica a sí misma a través de su desarrollo histórico. El razonamiento de Poincaré vendría a demostrar que el cálculo infinitesimal no forma parte de las matemáticas, que la electricidad no tiene que ver con la física y que la teoría de los compuestos orgánicos no es parte de la química. Ahora bien, gracias a este razonamiento, la extensión del "campo" de la lógica clásica (p.826) deviene una extensión del "sentido de la palabra *lógica*" (p.828). Poincaré dice, además : "Parece que no hay nada nuevo que escribir sobre la lógica formal y que Aristóteles había tocado el fondo" (p.826). Si lo que quiere decir con ello (como Kant) es que la Lógica no ha hecho progresos desde Aristóteles, se trata de un error de hecho; pero si sostiene que la Lógica debiera (o habría debido) permanecer confinada en el dominio descrito por Aristóteles, sostiene implícitamente que la Lógica es perfecta y completa desde su nacimiento, contrariamente a la analogía de todas las otras ciencias. No movería sino a risa quien pretendiera reducir las matemáticas a lo que eran en tiempos de Euclides y a la física a la física de Aristóteles. ¿Cómo atreverse a sostener o a insuinar que Aristóteles dijo la última palabra en Lógica y que esté prohibido desarrollar esta ciencia más allá de los límites que su fundador le asignara?

Por otro lado, si la "nueva lógica es más rica que la lógica clásica" (p. 828), no lo es tanto por la extensión de su dominio sino por la profundidad de los principios que han dirigido *siempre* razonamientos reconocidos como justos por ese instinto racional al que Poincaré otorga un precio tan grande. Poincaré parece reprochar a los logísticos el "introducir" en la Lógica nociones indefinibles y principios indemostrables. Sería más justo decir que los han descubierto o reconocido así como Aristóteles quien no inventó, sino descubrió y reconoció, el principio del silogismo. Poincaré se apresura demasiado al afirmar que estos principios indemostra-

bles "son llamados a la intuición, juicios sintéticos a *priori*" (p.829). Puede ser que hubiera sido de otra opinión si se hubiera tomado el trabajo de recorrer la enumeración de estos principios. ¿Porqué el principio de composición: "Si *a* es *b*, y *a* es *c*, *a* es *bc*" constituiría un llamado a la intuición y no el principio del silogismo: "Si *a* es *b*, y *b* es *c*, *a* es *c*"? ¿Porqué el principio de simplificación "*ab* es *a*" es más sintético que el principio de identidad con el que se confunde frecuentemente? En todo caso, Kant lo ha considerado como el tipo de juicios analíticos. Y es de estos principios que Poincaré ha podido decir: "Los consideramos como intuitivos cuando los encontramos enunciados de manera más o menos explícita en tratados de matemáticas; ¿cambian de carácter porque el sentido de la palabra lógica ha sido ampliado y ahora los encontramos en un libro intitulado *Tratado de lógica*" (p.829)? ¿En qúe tratado de matemáticas los ha visto formulados? Y, para voltear su argumento, desde el momento en que sean consignados en un tratado de matemáticas, ¿ello cambiaría su carácter lógico? "*No han cambiado de naturaleza, solamente han cambiado de lugar*" escribe y subraya Poincaré, pero ha sido él mismo quien los ha cambiado de lugar. No basta que sean empleados en razonamientos matemáticos para que se les califique de matemáticos y no basta que no se encuentren en tratados de Lógica clásica para que se les niege el título de principios lógicos. De otra manera tendríamos que decir que los principios *lógicos* son, por definición los que descubrieron y formularon Aristóteles y los escolásticos y que son *intuitivos* todos los principios lógicos descubiertos por los lógicos modernos. La distinción entre lo lógico y lo intuitivo se reduciría a una cuestión de cronología.

Por otra parte se abusa, en contra de los lógicos, del concepto vago de *intuición*, sobre todo cuando no se especifica de que intuición se habla. ¿De la intuición intelectual que tiene que ver con las relaciones entre ideas, o de la intuición sensible que reviste, necesariamente, una forma espacial? Ambas intuiciones difieren de un extremo a otro. Todos los lógicos están dispuestos a reconocer que sus principios proceden de la intuición intelectual, es decir, que son objetos de un conocimiento inmediato por la razón, pero pocos estarán dispuestos a aceptar que proceden de la intuición sensible y que reposan, como sostiene Lange, sobre esquemas espaciales. En fin, cualesquiera que sea la solución a esta cuestión "metalógica", todos los principios lógicos correrán la misma suerte y los principios tradicionales de identidad, contradicción, etc.,

serán "llamados a la intuición" en el mismo sentido y en la misma medida que los otros. No hay, en consecuencia, que acusar a los logísticos de alterar la Lógica al introducir la intuición pues si esta acusación tiene algún valor, el que empezó fue Aristóteles.

En todo caso es inexacto decir que los razonamientos "vivos", los únicos "en que nuestro espíritu permanece activo" son aquellos en los que "nuestra intuición juega todavía un papel" (p.816). Los razonamientos puramente lógicos exigen más esfuerzo del espíritu y del ingenio de lo que cree Poincaré e, incluso sin la ayuda (mediocre) de la piano lógica de Jevons, se requiere una cierta habilidad para combinar los resultados brutos del mecanismo y obtener la conclusión que se desea. Además, ¿porqué reprochar a la logística el que los razonamientos sean más fáciles y más seguros?[12] Si, como el álgebra, en ella se condensan en fórmulas breves los resultados de razonamientos largos y complicados, es para decuplicar las fuerzas y el ímpetu del espíritu, para permitirle abrazar un número mayor de datos y para extraer conclusiones más vastas y lejanas. Lejos de paralizar la invención o de volverla inútil, la Logística le presta alas. El espíritu inventivo encontrará siempre sobre que ejercerse, pero siempre sobre datos más y más complejos. Esto es lo que pasa en análisis en donde cada teoría nueva combina las fórmulas que resumen teorías más simples y elementales. Que Poincaré esté tranquilo: la Logística no excluye al genio.

Poincaré dirige un reproche singular a la Logística: "el papel de la inteligencia se limita a escoger en un arsenal limitado de reglas puestas de antemano, sin tener derecho a inventar nuevas" (p.825). Si notamos que estas "reglas" no son otra cosa que principios lógicos, la frase parece querer significar que la inteligencia "tiene el derecho" de inventar nuevos principios lógicos. Es una extraña concepción de la Lógica que la considera siempre en evolución y cambio y jamás acabada.[13] Esta idea procede evidentemente de la confusión (psicologista) entre la ciencia y lo que conocemos en un momento dado. No se "inventarán" jamás "nuevas" reglas lógicas, se descubrirán solamente que no habían sido notadas pero que son tan "antiguas" como las otras y, del mismo modo "puestas de antemano", es decir *a priori*. Y los logísticos no hacen otra cosa. ¿Porqué, entonces, Poincaré los acusa de innovar? A propósito de las nueve nociones indefinibles y de las veinte proposiciones indemostrables de Russell, dice: "creo que... habría encontrado algunas más" (p.829). Es su derecho: los logísticos no pi-

den más y registran reconocidamente sus descubrimientos o, si se prefiere, sus invenciones. Pero, ¿qué significan estos reproches contradictorios sino que Poincaré reivindica para sí el "derecho" de "inventar" principios lógicos en el momento mismo en que niega este derecho a los logísticos?

Además, ¿para qué discutir *in abstracto* las cualidades de la Logística? Por confesión de parte, "la pasigrafía puede darnos un criterio para decidir la cuestión que nos ocupa. Si todo tratado de matemáticas puede traducirse en lenguaje peaniano, los logísticos tienen razón" (p.825). Ahora bien los logísticos han respondido por adelantado y desde hace tiempo, a esta invitación irónica . *Hace diez años* Peano publicó la primera edición de su *Formulaire de Mathématiques*, que es, precisamente un tratado o manual escrito enteramente en Logística; la cuarta edición (1903-1904) incluye la Lógica, la Aritmética, la Teoría de números, el Algebra, la Teoría de los números reales, la de funciones definidas, el Cálculo infinitesimal, la Teoría de números complejos, la de funciones circulares, el Cálculo geométrico (que comprende la teoría de vectores y la de cuaternios), en fin, la Geometría diferencial; las adiciones contienen, incluso, elementos de Cinemática. La quinta edición del *Formulario* está en proceso de publicación.[14] Los teoremas principales están acompañados de su demostración logística. Añado que este manual de matemáticas es una obra colectiva, que Peano y sus colaboradores revisan y perfeccionan sin cesar. En consecuencia, la prueba que Poincaré exige de los logísticos está dada desde hace mucho tiempo y se completa de día en día.

Es verdad que Poincaré parece arrepentirse pronto de su concesión imprudente y añade: "Aún así, sería conveniente examinar la traducción de cerca. No basta que se nos presente una página en la que solamente hay fórmulas y no hay una sola palabra de la lengua vulgar para que nos inclinemos...Será necesario, también, cuando estemos en presencia de un razonamiento pasigrafiado, incluso cuando sea correcto, que examinemos si "un llamado a la intuición no se oculta en algún rincón" (p.825).

Estas reservas son evidentemente justas en tanto que se trata de consejos sobre el método crítico. Pero, ¿porqué Poincaré no se conforma? No basta expresar reservas generales, aplicables a toda obra demostrativa para poner en duda el valor de la Logística y lanzar la obra de los logísticos al desfavor y la sospecha. Estos han dado al público, no "una página" sino más de 300 de fórmulas y demostraciones logísticas. Qué quienes tengan dudas sobre el va-

lor de las demostraciones las "examinen" con la cercanía que quieran, es su derecho y su deber. Pero la *onus probandi* les incumbe y no basta, para desentenderse, inclinar la cabeza con una sonrisa de incredulidad.

II

Paso a las objeciones que tienen que ver con la Logística en cuanto ésta se aplica a las matemáticas. Aquí, nuevamente, Poincaré se equivoca al juzgarla solamente, según la exposición "popular" que yo hice. En efecto, las fórmulas logísticas, que constituyen, como dice Poincaré, un "nuevo lenguaje", se bastan a sí mismas y son inteligibles completamente por sí mismas; si hubiera necesidad de añadir una sola palabra del lenguaje vulgar, serían defectuosas o estarían incompletas. Más aún, si se inventa un "nuevo lenguaje", se hace con el propósito expreso de evitar los equívocos o las peticiones de principio implicadas de manera más o menos confusa en la lengua vulgar. En consecuencia, sólo las fórmulas logísticas pueden ser exactas, rigurosas y estar exentas de los vicios lógicos referidos. Así, cuando un autor cree deber traducirlas al lenguaje vulgar, lo hace simplemente para hacerlas accesibles a los "profanos"; pero debe quedar bien claro que esta traducción verbal es siempre imperfecta, aproximativa y no permite en modo alguno, apreciar el valor lógico de las fórmulas. Justamente porque el lenguaje no puede igualar la precisión y el rigor de las fórmulas no hemos tenido escrúpulos en introducir, en nuestras traducciones verbales, aparentes peticiones de principio para que sean más claras y más "francesas". ¿Qué importa una inexactitud más o menos desde el momento en que lo único que cuenta es la fórmula logística que da fe del punto de vista lógico? No podemos esperar que se juzgen y condenen estas fórmulas a partir de la simple inspección de la traducción verbal que damos para beneficio de los novicios. Toda traducción es una traición; y ello es más cierto cuando la traducción hace desvanecerse las cualidades del original sobre las que se efectúa el estudio y la disusión. Es como si trataramos de estudiar la métrica de Virgilio en una traducción francesa de *La Eneida*.

Ahora bien, son estas traducciones verbales y *solamente estas traducciones verbales*, las que ha sido tomadas en cuenta por Poincaré para llevar a cabo sus críticas; las fórmulas logísticas parecen no existir y no haber pasado ante sus ojos: "*Graecum est, non legitur*". Puede, por lo tanto, "divertirse en contar cuántos adjetivos numerales contiene mi exposición" (p.830), o cuantos indefinidos; esto no demuestra nada en contra de la "pasigrafía". Sin embargo, queremos examinar sus argumentos uno a uno para mostrar me-

jor cómo son todos falsos. A propósito de la definición lógica del cero, dice: "definir *cero* por lo *nulo* y lo *nulo* por el *ninguno* es, verdaderamente, abusar de la riqueza de la lengua francesa" (p.823). Luego reconoce que he "introducido un perfeccionamiento en *mi* definición" (doble inexactitud pues esta definición no es mía y el "perfeccionamiento" en cuestión se debe a Russell) al escribir:

$$0 = \iota\Lambda\colon \phi x = \Lambda . \supset . \Lambda = \breve{\iota}\, x \ni \phi x$$

"lo que quiere decir en francés", siguiendo a Poincaré que: "cero es el número de objetos que satisfacen una condición que no se cumple jamás. Pero como *jamás* significa en *ningún caso*, no veo en ello ningún progreso considerable" (p.824). Me limito aquí a recordar la traducción verbal que he dado de esta fórmula: "Si ϕx es siempre falsa, Λ es la clase de x que verifican ϕx". Esto quiere decir "en francés": Λ es la clase de objetos que satisfacen una condición que es *siempre falsa*, es decir, falsa para *todos* los valores asignados a x. ¿Dónde, en esta fórmula, se ve la idea del número cero o, incluso, de un número cualquiera?, ¿se nos reprochará por introducir en la Lógica nociones matemáticas cuando la Lógica clásica conoce los juicios universales y emplea la palabra *todo*? Para imputarnos una petición de principio (incluso simplemente verbal) Poincaré ha tenido que transformar nuestra traducción remplazando en ella "siempre falso" por "jamás verdadero". Si alguien abusa de la lengua francesa, no somos nosotros.

Pero este reproche es aún más inmerecido si se dirige a los logísticos, que no escriben ni en francés ni en italiano ni en inglés sino en un simbolismo constituido expresamente para ir más allá de las nociones de implicación latentes que el lenguaje introduce a partir de su uso, Poincaré dice: "Es imposible dar una definición sin enunciar una frase y es difícil enunciar una frase sin introducir el nombre de un número o, la palabra *muchos* o, al menos, una palabra en plural[15]. Y aquí, la pendiente es resbalosa y a cada instante nos arriesgamos a caer en una petición de principios" (p.821). Esta reflexiones,justas, tienen efecto solamente sobre las faltas lógicas del lenguaje y sobre las faltas que puede cometer. Es precisamente para evitarlas y para remediarlas que los logísticos han inventado sus signos rigurosamente definidos y que carecen de otro sentido que el referido a su definición[16]. En resumen, el argumento de Poincaré se remite a esto: "Todos aquellos que razonan con palabras del lenguaje vulgar están *expuestos* a cometer

peticiones de principio; ahora bien, los logísticos emplean, no palabras sino símbolos rigurosamente definidos, por lo tanto, *deben* recurrir, ellos también, a una petición de principios. El silogismo no es concluyente pues tiene cuatro términos. Y aún si tuviera sólo tres (es decir, en cuanto se pudiese concluir legítimamente de las palabras a los símbolos), las dos palabras que he subrayado lo invalidan: la mayor dice que se *pueden* cometer errores, la conclusión afirma que ciertos autores los han cometido *necesariamente*.

La crítica de la definición del número 1 no es más sólida. "Uno es el número de elementos de una clase en la que dos elementos cualesquiera son idénticos" es la traducción verbal que Poincaré da de esta definición. "Es más satisfactoria...en este sentido, pues para definir el número 1, no se hace uso de la palabra *uno*; sin embargo, se hace uso de la palabra *dos*" (p.825) y sospecha, (con razón) que no se puede definir *dos* mas que por medio de *uno*.[17] Pero abusa del hecho que yo haya tenido que emplear la palabra *dos* para hacer una frase "francesa". La fórmula logística es:

$$1 = \mathrm{Cls} \cap u \ni (u \neq \Lambda : x \in u.\ y \in u.\ \supset_{x,y}.\ x \equiv y)$$

que significa, con más exactitud : "1 es la clase de clases u no nulas tales que si x está en u y y está en u, x es idéntica a y cualesquiera que sean x y y". ¿En dónde está la palabra, e incluso la idea, de *dos* en esta fórmula? Poincaré podrá decir que en ella se hacen figurar *dos* elementos (problématicos) x y y de la clase u, pero el hecho que sean *dos* no interviene en forma alguna; la prueba es que, en realidad, no son sino *uno*: x y y no son sino dos nombres (perdón, nombres) para un sólo individuo. Se podrían introducir ventajosamente en la fórmula sin que cambie su significación. En todo caso, esta crítica no tiene efectos manifiestos en contra de otra fórmula equivalente que he dado[18]:

$$1 = \mathrm{Cls} \cap u \ni (u \neq : \Lambda : x \in u.\ \supset .\ u - \iota\ x \in 0)$$

"*Uno* es la clase de clases u no nulas tales que, si x está en u, la clase de u no idénticas a x es nula". Ellos supone, naturalmente, la definición de la clase nula pero, como se ve, ya no hay nada, incluso problemáticamente, que tenga que ver con *dos* elementos de la clase u; no hay sino uno sólo y nos limitamos a experimentar que no hay otro.[19]

¿Se podría decir que el hecho mismo de que se hable de *un* ele-

mento ya se implica al número *uno*? Esta es una objeción que Poincaré no formula pero a la que yo ya he respondido de antemano en el pasaje siguiente: "No hay que creer que la definición del *número uno* constituye un círculo vicioso, pues la definición de la clase singular reposa únicamente sobre la relación de identidad. Si es verdad que ella implica en un sentido *la unidad*, o más bién, *la individualidad* del elemento considerado, esta unidad no puede ser idéntica al *número uno* que tratamos de definir, pues esta unidad es una propiedad de cada elemento mientras que el *número uno* es la propiedad de una clase... Por lo tanto, en todos los casos, las *unidades* que constituyen un número cardinal son diferentes del *número uno* ".[20]

La confusión que existe entre ~~entre~~ estas dos ideas entre muchos espíritus proviene, creemos, del doble sentido de la palabra *uno* que es tanto el nombre de un número como artículo indefinido. En este sentido, vale más emplear *algún* como hacen los logísticos.[21] Este equívoco existe en francés y en alemán, no existe en inglés (*a* artículo indefinido, *one*, nombre de un número). Si, por lo tanto, alguien está dispuesto a invocarlo, que tenga cuidado de abusar, no de la "riquezá, sino de la pobreza de la lengua francesa. En resumen, no basta concebir *un* objeto *cualquiera* para concebir al *número uno*, ni pensar dos objetos para tener *ipso facto*, la idea del *número dos*. A partir de lo que una fórmula lógica contenga dos o más símbolos, no debemos concluir que implica la idea de dos o de cualquier otro número. Cuando decimos "Pedro y Pablo son sabios" queremos decir "Pedro es sabio y Pablo es sabio"; no pensamos en el número *dos* y no tenemos necesidad de hacerlo ni de hacer notar que se trata de "dos sabios". Del mismo modo, cuando se dice: "x y y son elementos de la clase u (o: pertenecen a la clase u)"[22], no se piensa en el número dos y ninguna idea de número está implicada en esta proposición.[23]

Estas consideraciones responden a esta objeción de Poincaré: "una relación es incomprensible sin sus dos términos; es imposible tener la intuición de la relación sin tener, al mismo tiempo, la de sus términos" (esto no prueba nada; y así, Poincaré añade:) "y sin percatarnos que son dos pues para que la relación sea concebible es necesario que sean dos y solamente dos" (p.830) No se trata de saber (cuestión psicológica) si uno "se da cuenta" o no que son dos, sino de que la noción de relación implica o no la de *número dos*. Para ello sería necesario que implicara la noción de clase formada por sus "dos" términos, lo cual, a todas luces, no es el caso. La pro-

posición "x es el padre de y" no implica, en modo alguno, la idea de la clase formada por x y y. Por otra parte, sucede, con frecuencia, que una relación (digamos reflexiva) existe entre un término y él mismo, lo que escribimos: xRx. ¿Sostendríamos que en ella hay todavía dos términos? Ello querría decir que x es a la vez *uno* y *dos*.

La única fórmula logística que Poincaré ha criticado en sí misma (y no en su traducción verbal) es la siguiente, de Burali-Forti (y debo advertir al lector que no forma parte del cuerpo de doctrina "peaniano" y que los símbolos que figuran en ella son propios del autor y no de la teoría en cuestión):

$$1 = \iota'T'\{Ko \cap (u,h) \ni (u \varepsilon Un)\}.$$

Poincaré, a propósito de esto dice: "No entiendo muy bien el Peaniano para arriesgar una crítica". Esta confesión nos desarmaría si no fuera porque añade inmediatamente: "me temo que esta definición no contiene una petición de principios pues percibo 1 en cifra en el primer miembro y Uno en todas sus letras en el segundo" (p. 823). Poincaré está en relación demasiado cercana con su "intuición" y ésta lo engaña. En lugar de arriesgarse a la crítica sobre lo que sus ojos testimonian, debía, conforme a la regla fundamental del método matemático, sustituir el definiendo en el definido y para asegurarse si verdaderamente esta definición contiene una petición de principios, sólo tendría que haberse referido a la definición del símbolo "uno". Esta definición se encuentra en la memoria *Le classi finite* a la que Burali-Forti se refiere expresamente al principio de la memoria citada por Poincaré. Héla aquí:

$$Un = K - \iota\Lambda \cap x \ni (y \varepsilon x. \supset_y. x = \iota y) \qquad \text{Df}$$

"Uno es la clase de clases x no nulas tales que si y pertenece a x, x es la clase 'igual a y' ". En otros términos, Uno es la clase de clases singulares o, según la concepción de Russell, el número *cardinal* Uno. Esta definición es equivalente a la que hemos dado antes y no implica más de lo que quiere definir. En cuanto a la fórmula que Poincaré ha criticado, significa: "1 es el tipo de orden de las clases ordenadas cuyo número cardinal es Uno". Así, se trata de definir el número *ordinal* 1 por medio del *cardinal* Uno y esta explicación basta para dispersar toda apariencia de círculo vicioso.

Vemos así, de qué modo la crítica de Poincaré es "arriesgada".

Por lo mismo, parece considerar como insignificante la fórmula que Burali-Forti deduce de su definición:

$$1 \varepsilon \mathbf{No}$$

Poincaré la traduce, en efecto, de manera inexacta: "Uno es un número" y se regocija, luego, a costa de la pasigrafía, porque ésta "basta" para "demostrar que uno es un número" (p. 824). Si hubiera leído con más atención la memoria de Burali-Forti (incluso en la "traducción interlinear italiana"), habría sabido que **No** significa "número ordinal" y posiblemente habría encontrado menos ridícula la fórmula que nos enseña que 1 es un número ordinal. Aún si esta fórmula no "enseña" nada a Poincaré, éste carece de fundamento para juzgarla como insignificante y esto por dos razones. Por un lado, basta esta fórmula para probar que la clase **No** existe y este resultado no debe ser despreciado, ya que Poincaré da tanta importancia a los teoremas de existencia reprochando a los logísticos, sin razón, de ignorarlos. Por otra parte, para probar que 2, 3,... y todos los números enteros finitos son números ordinales, estamos obligados a emplear el principio de inducción y, para ello, hay que partir de que 1 es un núméto tal. Por más evidente o trivial que esto pueda parecer a Poincaré, es importante demostrarlo y la fórmula de que se burla prueba precisamente la conciencia y el rigor de los logísticos. Cada vez, además, que se quiera aplicar el principio de inducción, estamos obligados a partir del hecho de que la proposición que se quiere demostrar es cierta para 0 o para 1; este hecho es, en general, evidente pero no por ello es indispensable constatarlo o demostrarlo pues es el punto de partida necesario de los razonamientos por recurrencia. Las bromas de Poincaré están, por tanto, totalmente fuera de lugar en estas circunstancias.

En cuanto a la contradicción o paradoja descubierta por Burali-Forti en la teoría de números ordinales transfinitos y a partir de la que Poincaré extrae argumentos en contra de la Logística, no diré sino una palabra, a saber que esta contradiccíon no puede ser imputada a la "pasigrafía", es decir, a la utilización de símbolos lógicos: la prueba es que matemáticos ajenos a la Logística la reconocen, la discuten e invierten en ella, desde hace varios años, grandes esfuerzos para resolverla.[24] Es una dificultad de Lógica pura, que reside en los principios de la Lógica de clases (es decir,

en la parte antigua y tradicional de la Lógica). He aqui, por otra parte, el modo en que Burali-Forti lo expone en una carta que me escribió sobre el asunto: "La respuesta a la crítica que Poincaré me hace está contenida en mi memoria *Una questione sui numeri transfiniti*.[25] Recordaré, en algunas palabras todo lo que, según yo, basta para plantear claramente la cuestión.

Del grupo de *clases bien ordenadas* de G. Cantor extraigo un grupo especial, el de las *clases perfectamente ordenadas* (p.157, prop. 4). Una clase perfectamente ordenada es también una clase bien ordenada (p. 260); séame permitido considerar, con Cantor, el tipo de orden de una clase perfectamente ordenada. Sea **No** el conjunto de tipos de orden de clases perfectamente ordenadas (p.161, prop. 25). Cada **No** es un número ordinal de Cantor.[26] *Admitiendo* el teorema de Cantor "si a y b son numeros ordinales, se debe tener siempre $a<b$, $a=b$ o $a>b$". Se demuestra que: "*Los aleph,*[27] *ordenados en sentido creciente, forman una clase perfectamente ordenada*".

Planteado ésto, si Poincaré quiere seguir afirmando que Ω existe únicamente porque me place afirmar que:

$$\Omega = T'(\mathbf{No}, \bar{\epsilon}>)$$

"Ω es el número ordinal de los *aleph* ordenados en sentido creciente", es necesario que: o se demuestre que el teorema que acabo de enunciar sea falso o que se niegue a Cantor el derecho a considerar el número ordinal de los elementos de una clase bien ordenada, es decir que *se niegue la existencia de números transfinitos.*

En suma, Burali-Forti cree que la contradicción proviene de los diferentes sentidos dados a las palabras "número ordinal y que depende, en el fondo, de la extensión y de las propiedades que se atribuyan al concepto de clase. Russell cree que no se puede resolver la cuestión más que restringiendo, o incluso sacrificando, la noción de clase; en fin, hay que renunciar a este principio, en apariencia evidente y claro para la intuición que afirma que cada concepto determina una clase del cual es la extensión.[28] Que la Logística sirva para descubrir esta contradicción no puede ser sino un mérito y no un reproche pues con ello prueba que es un instrumento de precisión para el pensamiento. Pero Poincaré es más exigente: convoca a la Logística a resolver una contradicción, que se ha transformado en la *crux methematicorium, hic et nunc*. Dice de Russell y de Whitehead: "Si hubieran podido ...purgar (a la teoría de los números infinitos de toda contradicción, nos habrían hecho

un señalado servicio" (p. 29). Los logísticos no están obligados a resolver las dificultades que detienen a todos los matemáticos, Poincaré incluído y, como modernos Edipos, responder a todos los enigmas de todas las esfinges que encuentren en las confluencias de la ciencia; sin embargo, si tienen éxito en donde otros han fracasado, Poincaré tendrá el placer de recordar esta frase y de hacer los honores que corresponden a la Logística.

III

Llego a las críticas especiales que Poincaré dirige a los logísticos en torno de la cuestión de su filosofía de las matemáticas y, en particular, de su teoría del número entero. Para empezar, hay ciertos argumentos que es sorprendente que hayan surgido de su pluma pero que son felizmente, poco propios para impresionar a los filósofos. Tales, por ejemplo, como el que sigue: "Las definiciones de número son demasiado numerosas y diversas... Si una de ellas fuera satisfactoria, no se darían nuevas" (p.821). Se podría oponer la misma objeción, no sólo a toda especulación filosófica (es el argumento vulgar de los escépticos y los positivistas), sino a toda *teoría* científica: Poincaré lo sabe bien. Si este argumento tiene algún valor, implicaría la negación de todo progreso, incluso científico. En matemáticas, en particular, existen numerosas definiciones de número irracional, de límite, de integral definida, etc. ¿Alguien ha concluído alguna vez que *todas* estas definiciones son malas? No, simplemente algunas son mejores que otras sin que ello quiera decir que éstas son propiamente defectuosas o viciosas. En fin, si se tomaran estos argumentos al pie de la letra, se demostraría que todas las definiciones propuestas son malas *excepto una*, la última: en consecuencia, no se dirige a la definición de Russell... pues es la última propuesta.

Poincaré se sorprende de que los logísticos definan la adición aritmética por medio de la adición lógica, lo que le parece reposar sobre un acto de intuición análogo pero "más complejo" (p. 832). Pero, para comenzar, si en verdad es ìnecesario un acto de intuición para una u otra de estas operaciones, ¿no es una ventaja y un mérito definir el uno por el otro de manera que se reduzcan al mínimo los actos de intuición? La adición lógica no es una invención de los logísticos, existe desde siempre en todos los espíritus, es la combinación que expresa la conjunción *y* en las expresiones siguientes: "Los franceses y los ingleses", "los filósofos y los matemáticos". La Lógica, incluso clásica, no puede evitarlo. No es, por tanto, una arbitrariedad, como parece creerlo Poincaré, la introducción de esta noción "en el capítulo titulado Lógica" (p. 831). Dado que es indispensable para la Lógica, toda la cuestión consiste en saber si se le puede emplear para definir la adición aritmética. Esta idea es suficientemente natural como para que Peano o Russell hayan tenido la inciativa, se encuentra expresamenmte en

Lambert. Para refutarla, Poincaré tendría que haber mostrado cómo y porqué la adición aritmética no puede definirse por medio de la adición lógica y, en consecuencia, criticar la definición formal que da Whitehead en la memoria que he citado varias veces. O si cree que la noción de adición lógica es "más compleja" que la de adición aritmética, que intente, al contrario de los logísticos, definir la primera en términos de la segunda. Es la mejor manera en que podría haber probado que la Matemática es independiente de la Lógica. Mientras tanto, que permita a los logísticos observar el precepto clásico: Los principios no deben multiplicarse sin necesidad.

Poincaré acusa solemnemente a los logísticos de haber violado dos reglas del método. La primera consiste en esto: toda definición matemática supone la existencia del objeto definido y no es válida sino bajo esta condición (p. 819; cf. p. 833, p. 31). ¡Y bien! esta condición no es, en modo alguno, una regla necesaria y los logísticos no tienen porque cumplirla. Es inútil invocar para esto, corrigiéndola, la opinión de Stuart Mill, cuya autoridad es más bien mediocre en lógica de las matemáticas. La condición que Poincaré pretende imponer a los lógicos es una exigencia absolutamente gratuita, descalificada por el ejemplo de los matemáticos más rigurosos. Una definición no es otra cosa que la imposición de un nombre: no supone, para nada, la existencia de su objeto y no tiene necesidad de que este objeto exista para ser válida y legítima. Se puede perfectamente bien definir un objeto problemático y demostrar, a continuación, en virtud de la definición misma, que el objeto no existe.[29] Se define la derivada o la integral de una función en general; esto no supone que toda función tenga una derivada o una integral. Lo que Poincaré ha querido (o ha debido) decir es todo lo contrario: Una definición no *implica* (no conlleva) la existencia del objeto definido y ésta debe ser demostrada o postulada si se la quiere invocar en razonamientos ulteriores. Esto es lo que nosotros mismos hemos dicho;[30] es una regla bien conocida del método matemático y los logísticos la observan tan rigurosamente como es posible. Basta recorrer el *Formulario* de Peano para constatar que cada definición está acompañada, cuando ha lugar, de un teorema de existencia que determina, con frecuencia, *en qué condiciones* existe el objeto definido.[31]

¿En qué consiste la *existencia* del objeto lógico en cuestión? Según Poincaré "en matemáticas la palabra *existir* no puede tener sino un sentido, significa exento de contradicción" (p. 819). Lamen-

tamos contradecirle en un punto tan elemental y tan esencial pero la existencia lógica (o matemática, que es lo mismo) es una cosa totalmenmte distinta que ausencia de contradicción.[32] Consiste en que una clase no sea vacía; decir: "Existen *a*'es (o al menos una *a*)" es, por definición, afirmar que la clase *a* no es nula. Es justamente por esto que los matemáticos tienen la costumbre, para probar la existencia de una clase, de dar un ejemplo, es decir, de exhibir un individuo que pertenezca a la clase y no tienen otro procedimiento para demostrar un teorema de existencia (a menos de remitirlo a un teorema o postulado de existencia previo).[33]

Pero, ¿cómo se demuestra la existencia del individuo que se usa como ejemplo?, ¿no es necesario que esta existencia sea establecida para poder deducir la existencia de la clase de la que forma parte? —Pues bien, ¡no!, por paradójica que pueda sonar esta afirmación, no se demuestra la existencia del individuo como tal. Los individuos, por el hecho mismo de ser individuos, se consideran siempre como existentes; o, más bién, la cuestión no se plantea para ellos pues la existencia lógica es una propiedad de clases y no de individuos.[34] No se tiene que expresar nunca que un individuo existe, hablando absolutamente, sino que existe en una clase, es decir, que forma parte de ella como elemento.[35] Cuando un individuo se define por medio de términos generales, su existencia se demuestra en dos etapas: se define al individuo como LE *u* (*u* es una cierta clase), y se demuestra que la clase *u* existe (es decir, que no es nula) pues es singular (no contiene más que un elemento, véase la definición previa de clase singular). La definición de individuo queda ahora justificada.[36] Pero, lo que se demuestra en realidad, no es la existencia del individuo como tal sino la existencia de la clase de la que forma parte.[37]

Se ve que, en todo esto, no se trata de contradicciones. ¿Cuál es, entónces la relación entre la existencia de una clase y la ausencia de contradicción en su definición? Consiste en lo siguiente: si una definición es contradictoria, *ningún* individuo cumple las condiciones y, *en consecuencia*, la clase correspondiente no existe. La contradicción es, así, un criterio de existencia puramente negativo, es el criterio de *no-existencia*. Recíprocamente, si una clase existe , es decir, si contiene algún elemento, se podrá concluir, como dice Poincaré (p. 819), que su definición no es contradictoria. La existencia aparece así como el criterio de la no-contradicción. Pero, remarquémoslo bien, la relación entre la existencia y la contradicción es justamente la inversa de la que afirma Poincaré: no es la

no-contradicción la que prueba existencia, es la existencia la que prueba no-contradicción.[38]

Pretender que una definición no sea válida sino cuando se prueba, primero, que no es contradictoria, es imponer una exigencia arbitraria y abusiva. Además, querríamos saber, gustosamente, cómo se podría probar *directamente* que una definición (o sistema de postulados) no es contradictoria. La *presencia* de una contradicción puede probarse, pero la *ausencia* de *toda* contradicción es, como la inocencia de un acusado, un hecho negativo que no puede probarse directamente. También Hilbert ha asegurado (en 1900), que se *puede* encontrar una demostración *directa* de la compatibilidad de los axiomas de la aritmética[39] y, no fue sino hasta 1904 que creyó encontrar una demostración.[40] Pero esta demostración, según la opinión de Poincaré mismo, no es satisfactoria. Si "Hilbert se desviste" o ha fracasado, no es "porque la dificultad es demasiado grande" sino porque el problema que plantea parece insoluble. Padoa ya había respondido a Hilbert[41] cuando le recordaba que, en su propia teoría de números algebráicos,[42] había demostrado, por el método ejemplar que es el único posible, la irreductibilidad de sus postulados y su independencia recíproca. Concluía con esta frase: "Las *contradicciones* o las *dependencias* de las proposiciones no pueden ser demostradas mas que por razonamientos deductivos, en tanto que las *no-contradicciones* o las *independencias* de las proposiciones no pueden demostrarse mas que por *constataciones* (se constata que las interpretaciones convenientemente elegidas de símbolos verifican o no verifican las proposiciones en cuestión)". En efecto, una contradicción o una dependencia se traducen en una proposición de no-existencia o en una implicación mientras que una no-contradicción o una independencia se traducen en una proposición de existencia o en una no-implicación. Esta diferencia equivale a aquella de las proposiciones universales y particulares de la Lógica clásica. Se sabe que no se pueden establecer proposiciones verdaderamente universales sino por demostración; por el contrario, para establecer una proposición particular basta citar un sólo caso en que sea verdadera y generalmente no se cuenta con otro medio pues no se le puede deducir de premisas universales sin añadir una proposición particular cualquiera. Ahora bien, de la misma manera en que es imposible deducir una particular de premisas universales, es decir, en definitiva, la negación de muchas afirmaciones, es imposible probar deductivamente una existencia o una no- implicación

partiendo de no-existencias o de implicaciones. Asi, el método directo que Hilbert y Poincaré preconizan es impracticable. Este no tiene, por lo tanto, el derecho de imponerlo a los logísticos y de exigir de ellos una demostración que Hilbert no ha podido dar. Podría, en el mismo tenor, convencerlos de su impotencia llamándolos a tomar la luna con los dientes.

A falta de una demostración directa, sugiere un método de verificación bien singular: para probar que un sistema de postulados no es contradictorio habría que confrontar, según él, todas las consecuencias de los postulados tomados de dos en dos para constatar que "no hay dos postulados tales que uno sea la contradicción del otro" (p. 820). Pero, como reconoce inmediatamente, este método es inaplicable en el caso en que las consecuencias que se examinan sean una infinidad (como en el caso en la Aritmética). Añado que este método, de hecho, nunca se ha aplicado. Jamás se ha visto a un matemático perder su tiempo en comparar entre sí todas las proposiciones de una teoría para asegurarse que las definiciones no contienen ninguna contradicción y que, *en consecuencia*, los entes asi definidos existen realmente. ¿Dónde estaríamos si por cada definición nueva hubiera que ocuparse de una verificación parecida? —Pero, podría decirse, el conjunto de las matemáticas constituye esta verificación: se trata del hecho de que nunca se han encontrado, sin que haya habido necesidad de confrontarlas de dos en dos, contradicciones entre dos proposiciones cualesquiera . —Muy bien, pero esta verificación *a posteriori* vale tanto para la Logística como para las Matemáticas, pues la Logística pretende, simplemente, formular los principios y las definiciones primeras de las Matemáticas. Se le pregunta, por ejemplo, si los postulados por medio de los que se define el número entero son contradictorios. No tiene que responder más que: deduzco de ellos todos los teoremas de la Aritmética clásica; ustedes no han encontrado nunca la más mínima contradicción cuando los han hecho reposar sobre intuiciones vagas y confusas; ¿porqué quieren que aparezcan hoy? Son las mismas proposiciones, solo que referidas deductivamente a algunos principios. En todo caso, el *onus probandi* incumbe a quienes creen que estos principios son contradictorios pues, una vez más, se prueba la contradicción pero no la no-contradicción.

El método en cuestión no es solamente inaplicable en la práctica e inaplicable de hecho: es lógicamente ilegítimo. En efecto, no basta acercar dos proposiciones para descubrir que son contradic-

torias, a menos que la contradicción sea formal y explícita. Por ejemplo, no hay contradicción *formal* entre las proposiciones: "ABCD es un paralelogramo no rectángulo" y "ABCD es un cuadrilátero inscriptible en un círculo"; la contradicción no aparece sino hasta que se conocen las propiedades del cuadrilátero inscriptible, es decir, a partir de que se deducen las consecuencias de la segunda proposición. Para poner de manifiesto la contradicción implícita y latente entre los dos postulados es necesario deducir de ellos todas las consecuencias posibles (una infinidad). Ahora bien, ello supone la definición siguiente: "Dos proposiciones son contradictorias entre sí cuando tienen consecuencias contradictorias entre sí". Pero tal definición es ilógica pues constituye un *circulus in definiendo*. Así, el criterio de no- contradicción que propone Poincaré implica, no solamente un progreso al infinito sino también un círculo vicioso.

Poincaré sabe bien que su método es impracticable y, así propone corregirlo por medio del principio de inducción: "Es posible, en rigor, que se pueda encontrar un medio de mostrar que un razonamiento nuevo no puede introducir contradicciones, siempre y cuando se suponga que en la serie de razonamiento anteriores no la hallamos encontrado" (p. 833). Se notará la forma dubitativa en que se emite esta hipótesis: en efecto, porque es una hipótesis en el aire que no se apoya sobre ningún ejemplo o precedente y que parece inventada a placer, sólo para poder imputar a los logísticos un círculo vicioso. Ahora bien, no sólo no es verdadera, es decir, que jamás se ha utilizado un modo de razonamiento tan bizarro sino que es inverosímil. Para mostrarlo, precisémosla según las indicaciones del propio Poincaré . Se supone, en primer lugar, que se puede formar una "serie de silogismos" partiendo de los axiomas como premisas (p. 32); luego que, "cuando se ha terminado el n-ésimo silogismo, se puede hacer otro y que éste es el (n+1)-ésimo"; en fin que se puede demostrar que "si no hay contradicción en el n-ésimo silogismo no la habrá en el n+1-ésimo". Todas estas hipótesis son absolutamente gratuitas y contrarias a toda verosimilitud. Para empezar, los razonamientos matemáticos no son, en general, una serie *lineal* de silogismos, si así fuera, el tipo de razonamiento matemático sería un *sorites*. ¿Es necesario repetir que el silogismo no es, en modo alguno, el tipo único de deducción y que hay otros principios o reglas lógicas que intervienen en los razonamientos? En seguida, las deducciones simples que componen un razonamiento no se alinean en una sucesión li-

neal y monótona como se imagina Poincaré; se encadenan, se unen, se separan, se entrecruzan de manera tal que la imagen exacta del razonamiento matemático no es una cadena sino una red de mallas yuxtapuestas o, más aún, un árbol genealógico.[43] En consecuencia, ¿qué significa el *número* de razonamientos que se habrían hecho en un momento dado, si su orden lineal es siempre más o menos arbitrario y proviene únicamente de la necesidad práctica de enunciarlos sucesivamente en el discurso (porque el tiempo sólo tiene una dimensión)? "El número n no sirve para contar una serie de operaciones sucesivas", dice Poincaré; ¿qué sucede con su argumento si estas operaciones nmo son sucesivas o no lo son sino accidentalmente? En fin, ¿es posible afirmar que este número n existe en cada instante y que está bien determinado. Se comprendería si se pudieran contar las deducciones simples y si se redujeran todas a tipos del silogismo pero, ¿cómo contar deducciones heterogéneas que proceden de reglas diversas?, ¿podría decirse que cada aplicación de un principio lógico constituye una unidad? Pero, además de que no todos los principios tienen la misma importancia deductiva, puede suceder que muchos principios intervengan al mismo tiempo en una deducción elemental. Tal es el caso, notablemente, cuando un principio interviene como premisa y otro como regla de deducción (véase la nota 43). Todo ello prueba, en suma, que el *número* de deducciones (silogísticas o de otras) carece de realidad objetiva y que, si se quiere numerarlas, la numeración es arbitraria. En consecuencia, ¿cómo admitir que se pueda establecer una proposición que dependa de este número y que sea concluyente de n a $n+1$? Del mismo modo que el "tiempo", el número "no tiene nada que ver". El hecho de que no se haya encontrado una contradiccíon en el curso de las primeras n deducciones, ¿puede considerarse como una propiedad del número n o, más exactamente, como una función de este número? Si no es así, no se puede, de las primeras n deducciones, concluir la $(n+1)$-ésima como no se puede preveer, después de n tiros al azar cuál será el $(n+1)$-ésimo. En resumen, incluso admitiendo la hipótesis quimérica inventada por Poincaré por necesidades de la causa, no habría modo de aplicar el principio de inducción pues no significaría nada. Ahora bien, es sobre esta única hipótesis que Poincaré se apoya para atribuir a los logísticos un círculo vicioso en el que no han incurrido: "Con *sís*, dice el buen sentido popular, se podría meter París en una botella". Es con estos *sís* que Poincaré llega a imputar un paralogismo a los logísticos.

Desgraciadamente, Poincaré parece olvidar en otros lugares todos sus *sís*, cuando afirma categóricamente que el principio de inducción es necesariamente invocado en toda demostración sobre la compatibilidad de los axiomas de la Aritmética (o de un sistema cualquiera de axiomas). Dice, por ejemplo, "hay que recurrir a procedimientos de demostración o, en general, nos veremos forzados a invocar el principio de inducción completa que se trata, precisamente, de verificar" (p. 820). ¿No podríamos creer que el método fantasioso que propone es de uso corriente? Por otro lado, lo cita como una de las "aplicaciones posibles del principio de inducción" (p. 32) como si esta aplicación hubiera sido hecha realmente. En fin, dice, a propósito del teorema de Bernstein: "si alguna vez se inventa otra demostración, habrá que apoyarse sobre este principio pues las consecuencias posibles de los axiomas, que es necesario demostrar que no son contradictorios, son infinitas" (p. 31). Así, basta que tengamos que vérnosla con una infinidad de proposiciones (o de objetos cualesquiera) para que, según Poincaré, el principio de inducción intervenga *necesariamente*.[44] Ha olvidado totalmente que la aplicación del principio que propone está sometido a hipótesis extremadamente restrictivas.

En el fondo, Poincaré parece confundir la inducción completa o matemática con la inducción pura y simple. ¿Cómo concebir, en efecto, que de la ausencia de contradicciones en una sucesión de razonamientos pueda inferirse la ausencia de contradicción en los razonamientos siguientes? Sin duda, si esta inferencia es cierta y se pudiera expresar por medio de la fórmula precisa: "Si no se han encontrado contradicciones en los primeros n razonamientos, no se encontrarán, tampoco, en los primeros $(n+1)$", habría ocasión de aplicar el principio de inducción y la conclusión sería igualmente cierta. Pero la inferencia en cuestión no puede ser sino probable y, en consecuencia, no constituye sino una inducción vulgar y no matemática. Para tomar un ejemplo prestado a Poincaré, la geometría de Lobatchevsky, que no comprende mas que un número finito de teoremas, no prueba, en absoluto, que el postulado de Euclides sea independiente de otros axiomas geométricos (es decir, que su negación fuese compatible con estos); esta geometría no da a esta proposición sino una probabilidad, tanto más alta cuanto más grande fuera el número de teoremas de la nueva geometría. Pero hay siempre un abismo entre una probabilidad, por grande que sea, y la certeza apodíctica. Ahora bien, la probabilidad caracteriza los resultados de la inducción vulgar mientras

que la inducción matemática es un procedimiento riguroso que engendra la certeza. Por lo tanto, si la inferencia que se obtiene de los razonamientos ya hechos a los razonamientos futuros no tiene más que un valor probable (como lo constata el buen sentido, el "instinto seguro" al que Poincaré hace referencia), es una inferencia que reposa sobre una inducción pura y simple y no sobre el principio de inducción matemática.

IV

Sea lo que fuere de la cuestión general de saber si una definición exige o no la demostración de existencia de su objeto y cómo podría o se debiera demostrar esta existencia, Poincaré comete un error material cuando reprocha a Russell por no haber dado ninguna demostración de la existencia de los números enteros.[45] En primer lugar, constato que Poincaré tiene a la vista, constantemente, la definición por postulados (que es la de Peano) y no tiene en cuenta la definición nominal con que Russell la sustituye. La frase que me cita sobre este asunto, "Esta definición no garantiza ni la existencia ni la unicidad del objeto definido", se aplica universalmente a las definiciones por postulados y precede y prepara, en mi exposición, la definición nominal. Confieso haber cometido un descuido al no mostrar que ésta última permite establecer la existencia lógica de los números enteros pues dicha existencia me parecía más o menos evidente. Pero Poincaré se equivoca al imputar la misma negligencia a Russell, justamente porque cree que lo he *seguido paso a paso.* Sin duda, me habría convenido seguir a mi modelo paso a paso pero en ese caso no hubiera hecho un análisis sino una traducción; es posible que eso hubiera sido mejor apreciado por todo el mundo. En todo caso, quiero reparar mi omisión (y el perjuicio involuntario a Russell) citando o resumiendo los pasajes principales en donde Russell demuestra la existencia de los números enteros.

Pues si hay algún reproche que Russell no merece, de manera general, es el de descuidar los teoremas de existencia. En su *Prefacio,* por el contrario, esta preocupación se manifiesta expresamente: "La necesidad de establecer el teorema de existencia en cada caso (es decir, la prueba de que hay entes de la espécie en cuestión) me ha llevado a muchas definiciones que parecen muy diferentes de las nociones usualmente atribuídas a los términos en cuestión. Tales son, por ejemplo, las definiciones de números cardinales, ordinales y complejos. Para los primeros y en multitud de otros casos, la definición (de los números) como clases, derivada del principio de abstracción, se recomienda principalmente por el hecho de que no deja duda alguna sobre los teoremas de existencia".[46] Así, en un prefacio que revela (como de ordinario) las ideas directrices de toda la obra, Russell da la más grande importancia a los teoremas de existencia y es por ello que prefiere las

definiciones nominales a las definiciones por postulados.

Este mismo cuidado aparece de manera natural en los capítulos en donde expone estas definiciones. Por ejemplo, en el capítulo 38 (*Ordinales transfinitos*), indica como se puede establecer la existencia de un número cardinal finito: Sea 0 un número cardinal, el número de números cardinales de 0 a n es n+1; por lo tanto n+1 existe y difiere de todos sus predecesores. Si todos los números cardinales finitos existen, existirá una clase que tenga cardinalidad α_0 y ordinal ω, lo que establece la existencia de ambos números (§300, p. 322). En el capítulo 44 (sobre los *números complejos*), Russell critica la definición ordinaria de número complejo pues no sirva para la prueba de existencia y la sustituye por una definición en términos de relaciones que establecen, por el contrario, esta existencia (§360, p. 379). En el capítulo 49 (*definición de espacios diversos*) se ocupa del "teorema de existencia" relativo a diversos espacios proyectivos y recuerda que este teorema puede demostrarse construyendo un espacio proyectivo complejo (la definición ha sido dada previamente, así como la demostración de existencia) (§413, p. 431). En fin, el último apartado de su obra (es decir el que menos puede escapar a un lector atento, el que contiene las conclusiones del autor o las ideas que le son más cercanas) comienza con las siguientes líneas:

"Los teorema de existencia de las matemáticas (es decir las demostraciones de que las diversas clases definidas no son nulas) están casi todos tomados de la Aritmética. Es útil reunir aquí los más importantes. La existencia de cero se deriva del hecho de que la clase nula pertenece a esta clase; la existencia del 1 al hecho de que cero es una clase singular (la clase nula es su único elemento). En consecuencia, del hecho que, si n es un número finito, $n+1$ es el número de números de 0 a n (incluídos ambos), resulta del teorema de existencia para todos los números finitos. Luego, de la clase de números cardinales finitos resulta la existencia de α_0, el menor de los cardinales infinitos, y de la serie de números cardinales finitos ordenados en orden de magnitud resulta la existencia de ω, el menor de los números ordinales infinitos..." (§474, p. 497). El resto del párrafo está consagrado a recordar los otros teoremas de existencia contenidos en el transcurso de la obra. Y termina con la siguiente frase: "Así, la cadena de definiciones y de teoremas está completa y la naturaleza puramente lógica de las matemáticas, establecida." ¡Tal es la última palabra del autor; tal es la demostración cuya ausencia afirma Poincaré y por la cual se lamenta!

Para permitir a los lectores apreciar esta demostración, recordaré aquí la definición *nominal* de número entero conservando el mal hábito de acompañarla con una "traducción entre líneas" para el uso de los "profanos":

$0 = \wedge$ Df

"Cero es la clase que contiene solamente a la clase nula."

$$N = x\ni (0\ \varepsilon\ s : n\ \varepsilon\ s.\ \supset_n.\ n+1\ \varepsilon\ s : \supset_s.\ x\ \varepsilon\ s) \qquad \text{Df}$$

"El conjunto de números enteros finitos (N) es la clase de las x contenidas en toda clase s que contiene al 0 y que contiene $n+1$ cuando contiene a n." Se sabe que la adición aritmética (de números cardinales *en general*) ha sido definida en función de la adición lógica;[47] y se ha visto, antes, la definición del número cardinal 1 de manera tal que el símbolo $(n+1)$ que aparece en la fórmula precedente se define nominalmente como el símbolo 0. Se sabe, también, que la implicación colocada entre paréntesis es la fórmula del principio de inducción y, es en este sentido, que sostenemos que los números enteros finitos se definen por medio del principio de inducción. Con más exactitud, el principio de inducción se traduce en la fórmula siguiente, que se deduce de la definición precedente por medio de transformaciones puramente lógicas:

$$0\ \varepsilon\ s : n\ \varepsilon\ s.\ \supset_n.\ n+1\ \varepsilon\ s : \supset_s.\ N \supset s$$

"Si una clase cualquiera contiene al 0 y si contiene $n+1$ cuando contiene a n, contiene todos los números finitos (es decir, a la clase N)."

De esta proposición se deduce, en fin, ésta —siempre por la vía lógica:

$$n\ \varepsilon\ N.\ \supset_n .n+1\ \varepsilon\ N$$

"Si n es un número entero finito, $n+1$ es un número entero finito."[48]

Planteado esto, he aquí cómo se establece la existencia de los números enteros. La clase 0 existe pues contiene un elemento (la clase nula). La clase 1 definida como la clase de clases singulares existe pues contiene un elemento (la clase 0, que es singular). La clase 2 existe pues hay una clase de 2 elementos, a saber, la formada por 0 y 1. Del mismo modo, en general, la clase $(n+1)$ existe pues $(n+1)$ es el número de números 0 a n (que son clases existentes).

En otro sentido, los números 0,1,2,3..., existen como indivi-

duos, es decir, como miembros de la clase N y esto se traduce, como hemos visto, por fórmulas del tipo: $n \varepsilon$ N. En primer lugar, 0 verifica el principio de inducción pues se tiene (sustituyendo x por 0):

$$0 \varepsilon s : n \varepsilon s . \supset_n . n+1 \varepsilon s : \supset_s . 0 \varepsilon s$$

lo que es evidente en virtud del principio de simplificación pues la tesis ($0 \varepsilon s$) figura como factor en la hipótesis. Así, 0 es un número entero finito (0ε N). En consecuencia, en virtud de la proposición:

$$n \varepsilon \text{ N} . \supset_n . n+1 \varepsilon \text{ N}$$

se puede demostrar que la clase N, que contiene al 0, contiene a todos los números enteros que se obtienen añadiendo 1 a 0, a 1, a 2,... a cada número entero ya obtenido.

Se ve cuál es la ventaja de esta definición nominal sobre la definición por postulados. Poincaré, que no considera más que éstas, plantea la cuestión de la compatibilidad de los postulados pues, en efecto, podemos preguntarnos si estos postulados no se contradicen entre sí. Pero en una definición nominal, tal cuestión no se plantea, o por lo menos, se simplifica singularmente pues una definición tal está constituída por una sola fórmula. Hay, entre ambos tipos de definición, la misma diferencia que hay entre una ecuación y su solución: podemos preguntarnos si una ecuación, en su forma primitiva, tiene raíces reales; no podemos dudar de ello en cuanto se haya extraído la fórmula que nos da la solución.

Poincaré objeta a la teoría precedente que define a los números finitos por medio del principio de inducción que el principio es igualmente esencial a la teoría de los números finitos y a la teoría de los números infinitos pues está implicada en la demostración del teorema de Bernstein (p. 27). Pero, para empezar, el teorema de Bernstein no es, en modo alguno, el "teorema fundamental" de la teoría de números infinitos: se puede considerar toda la Aritmética de los números finitos, definir su adición, su multiplicación, su elevación a potencias, su desigualdad, etc. sin recurrir a él. Esto es lo que demuestra la importante memoria de Whitehead a la que nos hemos referido y que Poincaré se abstiene de discutir. Es lo mismo que demuestra un autor ajeno a la Logística, Schoenflies en su *Rapport sur la théorie des ensembles*, cuando define dichas nociones desde el capítulo I mientras que el teorema de Schroe-

der-Bernstein sólo aparece en el capítulo III. A continuación, este teorema no se refiere, propiamente, a los números infinitos pues se trata de saber bajo qué condiciones *dos* conjuntos infinitos tienen el *mismo* número. Es una cuestión que concierne menos a la Aritmética pura que a su aplicación; del mismo modo en que la difícil y controvertida cuestión de saber si el número cardinal del continuo es uno de los alephs de Cantor no impide, en modo alguno, la teoría aritmética de los alephs y se refiere solamente a la naturaleza del continuo.

Para demostrar que el principio de inducción no es la definición del número finito, Poincaré emplea el razonamiento siguiente: En la demostración de Bernstein, "nos apoyamos sobre el principio de inducción que, según los logísticos, sería la definción de número finito. Por otra parte, en el enunciado del teorema no se trata de los números finitos sino solamente de números infinitos. Debiéramos ser capaces, por lo tanto, de demostrar el teorema sin apoyarnos en el principio. Esto es imposible; por lo tanto el principio no es la definición del entero finito que aparece en la demostración , es decir, el índice n del conjunto A" (p. 30). En principio, Poincaré no tiene el derecho de afirmar que "esto es imposible", sólo ha constatado que *una* demostración del teorema de Bernstein invoca el principio de inducción. A continuación, olvida que, si los números finitos no aparecen en el enunciado, aparecen en la demostración, como auxiliares, como índices de una sucesión de conjuntos, de la misma manera en que ciertos elementos de las figuras entran "por construcción" en la demostración de un teorema de geometría sin que, por ello, formen parte del enunciado;[49] y es por esta razón que el principio de inducción interviene. Poincaré intenta escapar a esta consecuencia añadiendo" y, en efecto, si buscamos de qué manera hemos sido llevados a hablar de este índice, veremos que el principio no está ahí gratuitamente" (p. 30) ¡Perdón!, no es el principio que introduce al índice sino, por el contrario, el índice introduce el principio. Poincaré quiere decir, posiblemente, que los números finitos no intervienen mas que como números ordinales, como simples números de un órden. Pero el principio de inducción sirve para definir tanto los números ordinales finitos como los números cardinales finitos (con quienes se confunden); más generalmente aún, como lo hemos dicho siguiendo a Russell, sirve para definir una *progresión* cualquiera, es decir, toda sucesión parecida a la serie de los números enteros finitos.[50] La razón es que la demostración en cuestión contiene una

doble progresión que se invoca el principio de inducción.[51] Se puede decir, por lo tanto, que la excepción confirma la regla pues el principio de inducción no aparece en la teoría de los números infinitos mas que cuando se hacen intervenir los números finitos. Para probar que este principio no es la esencia ni la definición de los números finitos habría que producir una demostración que se apoyara, necesariamente, sobre este principio sin hacer intervenir la idea de número entero finito (cardinal u ordinal) ni la de progresión.

Poincaré reconoce que el principio de inducción no interviene en Geometría, por lo menos en cierta medida. Sin duda interviene cada vez que tenemos que considerar números enteros finitos como en la teoría de los polígonos (n-gonos). Aquí otra vez, la excepción confirma la regla. Sin embargo, sostiene que el principio de recurencia es necesario incluso para la Geometría pues los teoremas de existencia de la Geometría se apoyan sobre consideraciones acerca de ciertos conjuntos de números (p. 30). Pero esto proviene del hecho de que estos números tienen como elementos últimos a los números finitos, es, por ello, con y por los números *finitos* que el principio de inducción se introduce en la Geometría. Por otra parte, he intentado reducir su justa proporción esta intervención de la idea de número en la Geometría, mostrando que no se trata sino de teoremas de existencia y que, en consecuencia, los números no son llamados a constituir el espacio sino a proveer un modelo o esquema, es decir, un conjunto simplemente *análogo* (por sus propiedades formales y relacionales").[52] Por ello, en todos los casos, no es permisible considerar el principio de inducción como un postulado de la Geometría si bien lo es de la Aritmética.

V

Poincaré acusa a los logísticos de una segunda falta capital que consiste en cambiar subrepticiamente de definición: "Dan del número una definición sutil, pues una vez está dada ya no piensan en ella... y cuando la palabra número se encuentra lejos de su pluma, le dan el sentido que le daría el primero que llegara... He aquí una palabra de la que se ha dado una definición explícita A; a continuación hacemos, en el discurso, un uso que supone implícitamente otra definición B" (p. 821). Se trata de una acusación grave que no puede dirigirse a lógicos tan serios y rigurosos como Peano y sus colaboradores sin dar una prueba. Ahora bien, Poincaré no la acompaña de ninguna y se limita a apoyarla sobre reflexiones generales sobre el método dirigidas tanto a los logísticos como a cualquier otro pues se trata, sin cesar, de cuestiones de "palabras" y "frases". Sin duda los matemáticos que razonan con palabras y frases se exponen a atribuir a un término, en lugar de aquel sentido asignado por la definición, el sentido que impone el uso corriente. Pero es justamente para evitar esas asociaciones e implicaciones ilógicas que los logísticos emplean símbolos cuyo sentido está determinado únicamente por sus relaciones formales y que se manipulan según reglas formales de cálculo. ¿Ya olvidó Poincaré, por lo tanto, que él reprocha a los logísticos por haber reducido el razonamiento a un mecanismo ciego, es decir, a despreciar el sentido de sus símbolos?

"Para demostrar un teorema no es ni necesario ni útil saber lo que quiere decir"; "el matemático no tiene necesidad de comprender lo que hace" (p. 816). Los dos reproches son contradictorios; que Poincaré deje, al menos, a los logísticos, la ventaja de la "corrección lógica de los razonamientos" que compense su carácter "formal" y casi "ininteligible". En todo caso, todos los razonamientos generales y vagos que alega para apoyar su crítica se vuelven en su contra pues tienden a probar que los logísticos están exentos de las causas de error que él señala.

He buscado durante mucho tiempo, en los artículos de Poincaré las pruebas precisas de su acusación; creo haber encontrado una y, aún así, no estoy del todo seguro: Poincaré reprocha a Russell el empleo de dos fórmulas diferentes del principio de inducción y de confundirlas ilegítimamente: "Un número puede ser definido por recurrencia, sobre este número se puede razonar por

recurrencia: son dos proposiciones distintas. El principio de inducción no nos enseña que la primera sea verdadera, nos enseña que la primera implica a la segunda (p. 835) y añade: "El principio de inducción no significa que todo número entero pueda ser obtenido por adiciones sucesivas, significa que, para todos los números que se pueden obtener por adiciones sucesivas, se pouede demostrar una propiedad cualquiera por vía de recurrencia" (ibid). En primer lugar la expresión "adiciones sucesivas" carece de precisión : llama necesariamente a la cuestión "¿cuántas adiciones?" y la respuesta es "un número finito"; pero los números finitos están caracterizados por el principio de inducción. En consecuencia, el enunciado que propone Poincaré significa exactamente esto: "Para todos los números que se pueden definir por recurrencia (o por inducción completa), se puede demostrar una propiedad por recurrencia." Ahora bien, ésta es una proposición analítica y casi tautológica: "Todos los números que verifican el principio de inducción verifican el principio de inducción". Si tal es la fórmula del principio de inducción, se trata de un juicio analítico y no sintético como pretende Poincaré.

Pero esta no es la verdadera fórmula del principio de inducción y no es comprensible que un matemático como Poincaré sea culpable de tal desprecio. No es, empero, una afirmación en el aire pues nos lleva a la importante cuestión que presenta al final de su segundo artículo y que precisa en los siguientes términos: "*Un número entero es aquél que puede obtenerse por adiciones sucesivas, es aquel que puede definirse por recurrencia...Un número entero es aquél sobre el cual puede razonarse por recurrencia...* Las dos definciones no son idénticas; son equivalentes, sin duda, pero lo son en virtud de un juicio sintético *a priori*; no podemos hacer pasar una por la otra por medio de procedimientos puramente lógicos" (p. 32). O, si se quieren formular rigurosamente estas dos definiciones, se debe escribir la primera como sigue:

$$N = x \ni (0 \varepsilon s : n \varepsilon s. \supset_n . n+1 \varepsilon s : \supset_s . x \varepsilon s)$$

"N (clase de números enteros finitos) es el conjunto de x tales que si 0 es un s y si "n es un s" implica "$n+1$ es un s", x es un s". La segunda como sigue:

$$0 \varepsilon s : n \varepsilon N \cap s . \supset_n . n+1 \varepsilon s : \supset_s . N \supset s$$

"Si 0 es un s y si del hecho que un número entero n sea un s se sigue que $n+1$ es un s, todos los números enteros son s". Ahora bien, esta segunda fórmula (que no es una definición, como la primera, sino la fórmula del principio de inducción) se deriva de la primera por medio de una transformación puramente lógica. El tránsito de una a otra se lleva a cabo por medio de un procedimiento tan analítico como el tránsito de la proposición: "Pompeyo es una x tal que César venció a x" a la proposición "Pompeyo fue vencido por César" o "César venció a Pompeyo". Se ve si tal tránsito constituye un juicio sintético a priori.

¿Se diría que los logísticos han inventado un enunciado nuevo del principio de inducción que se opone al enunciado clásico? No, no han hecho sino traducir en símbolos el enunciado tradicional. Y lo más fuerte es que Poincaré lo dice al principio de su primer artículo: "Se sabe cuál es el enunciado de este principio. Si una propiedad es verdadera del número 1 [53] y si se establece que es verdadera de $n+1$ siempre que lo sea de n, será verdadera para todos los números enteros" (finitos) (p. 815-16). Ahora, esta es una de las traducciones verbales de la fórmula del principio de inducción que se escribió más arriba [54]. Poincaré no puede, por lo tanto, contestar la exactitud de la fórmula en cuestión. Así, acusa a los logísticos de cambiar subrepticiamente de definición y les él mismo quien, en el curso de un mismo artículo, cambia la definición, más aún, el enunciado del principio de inducción! Para probar su acusación, comete, él mismo, el paralogismo que les atribuye equivocadamente y todos sus reproches de ilogismo recaen sobre sí mismo. Si tuviera el espíritu de Poincaré diría que su "aventura" es tan instructiva como la de Burali-Forti y que debe "advertir" a los adversarios de la logística de "la necesidad de ser circunspecto".

No pondré de relieve la conclusión de los artículos de Poincaré porque no veo la utilidad de llevar la discusión al terreno histórico en donde se complica con cuestiones de interpretación. El debate no es entre "Kant y Leibniz" sino entre Poincaré y los logísticos. Por otra parte, la cuestión, tal y como Poincaré la coloca, no es de filosofía general o de epistemología sino de lógica pura. Admitiendo sus principios y sus nociones primeras, ha sostenido que a partir de estos datos no se podía reconstruir la matemática entera sin otro postulado [55] (llamado a la intuición o juicio sintético a priori) y ha creído descubrir en su construcción lógica paralogismos (círculos viciosos o peticiones de principios). Creo poder concluir de

la discusión precedente que ninguna de estas tesis ha sido probada y que, en particular, los logísticos no han cometido ninguna de las faltas lógicas que se le imputa ligeramente. Tengo una idea muy alta del espíritu y del carácter de Poincaré para no creer que retornará a una apreciación más justa y favorable de la Logística, cuando la haya estudiado.

notas

1 Publicados en forma de volúmen, con correcciones y adiciones, con el título de *Les Principes des Mathématiques* (París, Alcan, 1905). A continuación, remitiré al lector a la página de la *Revue* y a la página del volúmen. En cuanto a los artículos de Poincaré, me limitaré a citar la página (las p.815-835 pertenecen al tomo XIII y las p. 17-34 al tomo XIV de la *Revue).*

2 *Ueber den Zahlbegriff*, ap. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. VIII (1900).

3 Véanse todas las ediciones del *Formulaire de Mathématiques* y las *Notations de Logique mathématique* (18940 que son la introducción de la primera edición.

4 *Versuche einer Zeichenkunst in der Vernunftlehre*, ap. *Logische und philosophische Abhandlungen*, editados por Joh. Bernoulli (Berlín, 1782).

5 *Ueber Pasigraphie, Ihren gegenwaertingen Stand und die pasiegraphische Bewegung in Italien* (1898), traducido al inglés en *Monist*, octubre, 1898.

6 Cf. Couturat y Leau, *Histoire de la langue universelle*, cap. preliminar: Las pasigrafías (París Hachette, 1903).

7 *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXV (1901).

8 Como las notaciones infantiles de Herigono que escribía, por ejemplo, 5< por *pentágono*; o como cualquier sistema de abreviaciones análogas que un estudiante de matemáticas pudiera inventar para tomar notas.

9 Desde 1895, Peano escribía: "La lógica matemática... no se reduce simplemente a una escritura simbólica abreviada, a una especie de taquigrafía; permite estudiar las leyes de estos signos y las transformaciones de las proposiciones...Los dos objetos de la Lógica matemática, la formación de una escritura simbólica y el estudio de las formas de las transformaciones o de los razonamientos están estrechamente ligados" (*Sur la definición de la limite d'une fonction, en American Journal of Mathematics*, t. XVII). Esta memoria estaba destinada (como lo demuestra su subtítulo: *Ejercicios de lógica matemática*) a dar a conocer la nueva Lógica a los matemáticos. Estos no tendrían excusa si la ignorasen todavía, y serían doblemente culpables si la criticaran si conocerla.

10 Cf. su memoria en el Primer Congreso Internacional de Filosofía (París, 1900).

[11]V. La lógica de Leibniz, p. 84-85, con los textos citados en la nota y el apéndice III

[12]"Más seguros", pues Poincaré confiesa que en los razonamientos vivos "es difícil no introducir un axioma o postulado que pase desapercibido" (p.816). ¿Habría que concluir, entonces, que la "vida" es incompatible con la Lógica?

[13]Para emplear la comparación favorita de Poincaré, ¿qúe se diría de un jugador de ajedrez que quisiera inventar una regla nueva durante una partida, por ejemplo, que su rey, en jaque, mueva varias veces? Tal invención se llamaría, simplemente, trampa.

[14]Peano ha publicado, además, un manual clásico: *Aritmetica generale e algebra elementare*, escrito en logística (Turín, Pavia, 1902).

15 A propósito del plural, conviene hacer notar que Peano lo ha excluído de su *Latino sine flexione* siguiendo la sentencia de Leibniz: *Videtur pluralis inutilis in Lingua rationali*. El plural puede ser reempazado por adjetivos numerales o por *omnis* (todo); en todas partes, por otra parte, puede suprimírsele sin inconveniente. Es decir, nuestras lenguas hacen un gran abuso de él (como de todas las otras flexiones).

[16]Peano decía textualmente en el principio del *Prefacio* a los *Aritmetices principia* (1889): *Queaestiones quae ad mathematicae fundamenta pertinent... satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur. Quare sunni interest verba ipsa, quibus utimur, attente perpendere...* y el autor concluye la necesidad de emplear símbolos lógicos.

[17]Mediante la fórmula general por la que se define n+1 a partir de n. V. *Les Principes des Mathématiques*, cap. II, B, p. 59; *Revue*, XII, 222.

[18]Ibid., en donde he deducido logísticamente la precedente (p.60).

[19]He aquí una definición más fundamental que nos ha comunicado Russell: "*Uno* es la clase de clases *u* tales que la proposición: " '*x* está en *u*' equivale, para todos los valores de *x*, a '*x* es idéntica a c' " no es falsa para todos los valores de c". Se ve que esta definición no supone más la noción de clase nula. En cuanto a la fórmula '*x* está en *u*', véase su definición más adelante.

[20]*Les Principes des Mathématiques*, cap. ii, A (p. 47-48; *Revue*, t. XII, p. 214). Poincaré parece proponer o aceptar tal justificación cuando, tras citar la frase de Hilbert: "tomemos en consideración al objeto 1", añade: "Notemos que al actuar así no implicamos, en modo alguno, la noción de número pues es evidente que 1 no es, aquí, mas que un símbolo..." p.18). Sin duda, pero es *un* símbolo, es decir *un* objeto. ¿Poincaré diría que esto implica al *número uno*?, ¿o dará a los logísticos la misma libertad que concede a Hilbert?

[21]También Méray da, así, un ejemplo de lógica a los otros matemáticos.

[22]Nótese que es la gramática quien nos impone el signo del plural en *son elementos* o *pertenecen*.

[23] He aquí la definición rigurosa de la proposición "*x* está en *u*", que hemos comunicado a Russell: "*x* está en *u*" significa "La proposición: f(x) es verdadera y *u* tiene con *f* la relación de una clase con la propiedad que la define" no es falsa para todos los valores de *f*". No hay aquí ni la más remota sombra de una idea de número 1. más bién (como en el enunciado) las nociones *puramente lógicas* de *falso*, de *negación* y de *todo*. Esta definición se encuentra ya en Frege *Grundgesetze der Arithmetic*, t. I, p. 53 (1893).

[24] Bernstein, *Math. Ann.*, t. 60; Jourdain, *Philosophical Magazine*, 1904, 1905; Russell, *Mind*, 1905; Hadamard, Borel, Lebesgue, Baire, *Bulletin de la Société Math. de France*, 1905; Zermelo, Borel, Koenig, Schoenflies, *Math. Ann.*, t. 59, 60.

[25] *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, 1897, pp. 154-164, 260 (en la penúltima línea de la p.260 las dos palabras *ben, perfettamente*, han sido intercambiadas entre sí por un error tipográfico.)

[26] Puede que algunos de estos no estén contenidos en mi clase **No**

[27] Hay que hacer notar: los **No** y *no* "los numeros ordinales de Cantor".

[28] Véase Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, en *Proceedings of the London Math. Society*, 14, diciembre de 1905 (series 2, vol. 4, parte I, p. 29-53). Poincaré concluye apresuradamente: "Burali-Forti y Cantor llegan a conclusiones contradictorias; por lo tanto, uno u otro se equivocan" (p. 825). No se puede decir que uno de estos autores se equivoque, se trata, como ha mostrado Russell, de una contradicción de principios, una especie de antinomia. Vemos, desde ahora, lo que vale la conclusión: "Por lo tanto la pasigrafía no nos preserva del error". Por lo demás, la Logística no un "método de infalibilidad" (como decía Leibniz) que, excepto cuando ciertas premisas son puestas y aceptadas, no puede hacérsele responsable de una contradicción inherente a los principios mismos.

[29] Euclides dice, por ejemplo (IX, 20) : "Sea el más grande de los números primos" y luego demuestra que no existe, es decir, que existe un número primo más grande que .

[30] *Les principes des Mathématiques*, p. 39.

[31] Por ejemplo, en el *Formulario* (t. V, p. 53) se define el mínimo común múltiplo de dos números enteros (P. 1.0) y luego se demuestra que este m.c.m. existe, es decir, es un número entero (P. 1.1). A continuación (p. 57) se define el mínimos común múltiplo de una clase de números (P. 12.0) luego se demuestra que este m.c.m. existe si la clase en cuestion tiene un número cardinal finito (P. 12.3). Del mismo modo (p. 46, P. 1.0) se define el máximo de una clase de números y luego (p. 47) se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que una clase de números enteros tenga un máximo es que esta clase tenga un número cardinal finito (P. 2.6).

[32] Curiosamente, esta concepción de existencia lógica no parece admisible excepto en un *panlogismo* lógico análogo al de Leibniz en el que la extensión de los conceptos estaría absolutamente determinada por su comprehensión. Por ejemplo, Leibniz y sus discípulos creían que si "ningún hombre es una piedra", es decir, si

no hay "hombres-piedra" es porque los conceptos *hombre* y *piedra* contienen, respectivamente, elementos contradictorios (*tales como vivo y no-vivo*).

[33]Así, en Logística, basta tener una proposición de la forma: $x \varepsilon u$ (x es un u) para que se pueda deducir inmediatamente: u (la clase u existe, hay ús).

[34]Por supuesto, las clases 1 mismas pueden ser consideradas como individuos (en relación con las clases de clases); pero entonces, "existen", incluso cuando son nulas.

[35]Por ejemplo cuando hablabamos de la existencia del mínimo común múltiplo o del máximo de una clase de números, la existencia significaba esto: "mlt $u \varepsilon$ N", "max $u \varepsilon u$", es decir, el mcm de la clase u es un número entero, el máximo de u está en u. Poincaré cree necesario añadir a los postulados de Peano el siguiente: "Todo entero tiene un sucesor". No ha visto que este postulado, que considera nuevo está contenido en el postulado 3 al que quisiera añadir: "El sucesor de un entero es un entero", en símbolos:

$$n \varepsilon \mathbf{N}.@_n \text{seq}\, n \varepsilon \mathbf{N}$$

En efecto, esta fórmula implica que seqn existe (como individuo de la clase N) e incluso que es único (pues de otra manera el símbolo ε estaría reemplazado por @).

[36]Hay que hacer notar que si la definición de una clase no tiene necesidad de justificación (la clase puede ser nula), la definición de un individuo debe justificarse por la doble demostración de *existencia* y *unicidad*. No hay, por lo tanto, ninguna contradicción.

[37]Cf. Russell, *The existential import of propositions*, ap. *Mind*, 1905.

[38]Tras haber escrito estas líneas, encontramos la misma doctrina en Frege, *Grundlagen der Arithmetik* §§94, 95 (1884). Citemos solamente algunas frases: "Un concepto es admisible incluso cuando sus marcas contengan una contradicción; sólo que no se debe suponer que algo cae en su extensión. Del hecho aislado de que un concepto no contenga contradicción, no puede concluirse que algo caiga en su extensión..." (§94). "La no-contradicción de un concepto no puede ser establecida de manera rigurosa excepto que cuando se prueba que alguna cosa cae en su extensión. Lo inverso sería un error" (§95).

[39]Comunicación al *2do. Congreso int. de matemáticos* (París, 1900); v. *Compte rendu* de este congreso; *Goettinger Nachrichten*, 1900; *Archiv fur Mathematik und Physik*, 1901, y *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1902.

[40]Comunicación al *3er Congreso int. de matemáticos* (Heidelberg, 1904); v. *L'enseignement mathématique*, 15 de marzo de 1905 y *The Monist*, julio 1905.

[41]*El problema no. 2 de Hilbert*, en *L'enseignement mathématique*, t. V, p.85-91 (1903).

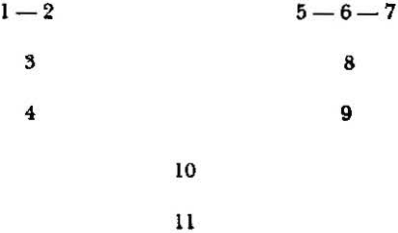
[42]*Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*, en *Bibliothe'que du (1er)*

Congre's int. de Philosophie, t. III, p. 309- 365; *Numeri interi relativi*, en *Revue de Mathématiques*, t. VII, p. 73-84 (1901).

[43] Ya hemos dado, en nuestro artículo sobre *La filosofía de las matemáticas en Kant (Revue*, XII, 365; *Les Principes des Mathématiques*, p. 286) un ejemplo de demostración matemática analizando su estructura. Vamos a citar otro ejemplo para apoyar las consideraciones del texto. Se trata de la demostración de este teorema elemental de lógica:

	a@b.=.a=ab	
(1) (Ident)	a@a.a@b.@.a@ab	(Comp)
(2) (Simpl)	a@ab.ab@a.@.a=ab	(Df=)
(3)	(1)(2).@:a@b.@.a=ab	(Syll)
(4)	a@b.@.a=ab	(Ded)
(5)	a=ab.@.a@ab	(Df=,Simpl)
(6)	a@ab.@.a@a.a@b	(Comp)
(7)	a@a.a@b.@.a@b	(Simpl)
(8)	(5)(6)(7).@:a=ab.@.a@b	(Syll)
(9)	a=ab.@.a@b	(Ded)
(10)	(4)(9).@:a@b.=.a=ab	(Df=)
(11)	a@b.=.a=ab	(Ded)

Hemos numerado a la izquierda (del 1 al 11) las deducciones elementales. Hemos inscrito *a la derecha* el principio que sirve de regla o tipo de deducción y, *a la izquierda*, si ha lugar, el principio que entra como premisa en la deducción (el principio de identidad en 1 y el principio de simplificación en 2); se ve, así, que una sola deducción simple puede apoyarse sobre varios principios lógicos. El número 11 no es máximo, pues algunas deducciones pueden detallarse aún más; así en 1 y 2 se invoca la fórmula "x@xV" que resulta de la definición de V; en 1, 2, 6, 10 se invoca el principio de simplificación empleando la cópula @ en lugar de la cópula = que conlleva el principio invocado. La deducción 8 es una doble aplicación del principio del silogismo, es decir un sorite; etc. Se notará que el silogismo que se emplea, en general, en matemáticas, es el silogismo hipotético y no el silogismo categórico en que se piensa siempre cuando se pretende reducir el razonamiento matemático al silogismo. Se notará también el uso del principio de deducción (Ded) que significa "Si la hipótesis de una implicación es verdadera, se puede afirmar la tesis por separado" (Ver *Les Principes des Mathématiques*, p. 11; *Revue*, XII, 27, en donde se llama a este principio, equivocadamente, *principio de aserción*). En fin, se constatará que el orden y el encadenamiento de las deducciones esta figurado en el esquema siguiente:



que muestra la estructura *ramificada* de la demostración. Esto sucede, por otra parte, casi cada vez que se va a demostrar una igualdad lógica, que equivale a dos implicaciones inversas.

Hemos escogido a propósito un ejemplo extremadamente simple, para que el análisis no fuese demasiado largo. Se encontrará el análisis de otras demostraciones lógicas en Peano, *Formulario* IV, 15; *Revue de Mathématiques*, VII, 18; y ejemplos de demostraciones matemáticas mucho más complejas en donde intervienen reglas de importación, exportación, transposición y eliminación en la memoria ya citada: Peano *Sur la définition de la limite* (1895).

[44]Cf. p. 829: "Sin duda se verá fácilmente(?) que una operación nueva no puede introducir contradicciones si éstas no se han producido en etapas precedentes. Pero concluir de ahí que nunca habrá sería hacer inducción completa."

[45]"Habría querido refutar la demostración de Russell y Couturat. Lo que me lo impide es que la demostración no existe", declara categóricamente Poincaré (p. 834).

[46]*The Principles of Mathematics*, p. ix.

[47]v. *Los principios de las matemáticas*, p. 52, *Revue*, XII. 218.

[48]v. Whitehead, *On cardinal numbers*, en *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902). Se hará notar que esta última proposición es uno de los postulados de Peano, lo que muestra la diferencia entre la definición nominal y la definición por postulados.

[49]Por ejemplo, en la demostración del teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo, se traza la paralela a uno de los lados y se hace intervenir el postulado de Euclides cuando en el enunciado no se trata, en modo alguno, de paralelas.

[50] V. *The Principles of the Mathematics*, 229, p. 240; *Les Principes de Mathématiques*, p. 66 y 78.

[51]Poincaré mismo dice: "Nuestros conjuntos An y Bn se definen *por recurrencia* y se razona acerca de ellos *por recurrencia*".

[52]*Les Principes des Mathématiques*, p. 212.

[53]O del número 0, se trata de lo mismo.

[54]Es una de las traducciones verbales que habíamos dado en *Les Principes Mathématiques*, p.55; Revue, XII, 221.

[55]Ver p. 830 y 832.

Las bases de la logística hilbertiana

Jacques Herbrand

Durante los últimos años, una nueva doctrina de lógica se ha desarrollado bajo la égida del matemático alemán Hilbert. Se dice que esta doctrina es capaz de examinar y resolver todos los problemas y dificultades, surgidos en los últimos cuarenta años, concernientes a los fundamentos de las matemáticas. Creemos que es de interés apuntar brevemente cuáles son las ideas fundamentales sobre las que se apoya y la manera en que se hace uso de ellas. No pretendemos explicar las ideas de Hilbert mismo en estas páginas; el instrumento que él forjó es independiente de esta presentación. Sólo deseamos presentar los principios de su teoría en una forma desde la que intentaremos de que queden más claras y menos sujetas a objeciones que otras que han sido seleccionadas hasta ahora.

La característica de esta nueva doctrina —que su fundador ha llamado metamatemáticas, esperando expresar con ello que todas las cuestiones de principio que conciernen a las matemáticas quedarían incluídas en ella— es que tiene como objeto de estudio, no los objetos con que los matemáticos se preocupan usualmente sino las proposiciones mismas que pueden pronunciarse acerca de estos objetos. Así, la doctrina toma en cuenta las proposiciones que pueden establecerse en una teoría y busca sus propiedades características. Es, en cierto sentido, una matemática del lenguaje.

Para alcanzar esta meta las metamatemáticas podrían haber tomado el lenguaje ordinario y estudiado las oraciones que se pueden formar con estas palabras. Pero este lenguaje es, en verdad, demasiado poco adecuado para las matemáticas; es infinitamente más conveniente usar un lenguaje especial que posea la simplicidad deseada y en el que puedan expresarse todas las oraciones que tienen sentido en matemáticas. De hecho, tales lenguajes ya habían sido creados gracias a los esfuerzos de los logicistas. En su co-

Mathesis, 5 (1989) 543-555

nocido trabajo *Principia Mathematica*, Russell y Whitehead exhibieron un lenguaje particularmente simple, en el que sólo se necesita un número extremadamente limitado de signos. Todos los lenguajes que se han usado desde entonces se han derivado del de ellos.

Para entender claramente los principios de este lenguaje debemos recordar, primero, lo que una teoría matemática comprende: toma en cuenta ciertas categorías de objetos y, en ellas, ciertos objetos particulares, ciertas propiedades que estos objetos pueden tener[1] y ciertas relaciones que pueden existir entre ellos. Por ejemplo, en aritmética estudiamos los enteros positivos; la relación fundamental que consideramos vale entre dos números cuando el segundo se obtiene del primero añadiendole *uno*. De manera similar, en geometría estudiamos puntos y la relación fundamental vale entre tres puntos cuando están en la misma línea recta. Somos capaces de demostrar que todas las proposiciones que podemos imaginar se pueden enunciar usando solamente estos objetos y esta relación. De ahora en adelante, designaremos objetos y relaciones fundamentales por medio de letras (como se hace en álgebra o para puntos en geometría). En particular, ciertas letras, que llamaremos [variables] se habrán de considerar indeterminadas y representarán un objeto *arbitrario* en una cierta categoría de objetos (jugarán el mismo papel que las variables en álgebra). Cuando queremos traducir una teoría determinada a nuestro lenguaje, estas letras siempre serán las mismas para el mismo objeto, propiedad o relación. La oración [L] objeto *a* tiene la propiedad Φ se traducirá como$\Phi(a)$; la oración [L] objeto *a* tiene la relacion **R** con el objeto *b* se traduce como $a\mathbf{R}b$ y así sucesivamente. Así, tenemos cierta número de proposiciones, las proposiciones atómicas de la teoría, de manera tal que cualquier otra proposición que tuvieramos que enunciar en esta teoría puede construirse empezando con ellas.

Resulta de las investigaciones de Russell y Whitehead[2] que para hacer esto es necesario introducir solamente los tres siguientes signos (y su número se podría reducir aún más): el signo **V** quiere decir "o", el signo **f** significa "es falso que", el signo (x), donde x es una variable, quiere decir "hay un objeto x tal que". (Por ejemplo, si **P** Y **Q** son proposiciones, **PVQ** quiere decir " **P** o **Q**" y **P** quiere decir "es falso que **P**"; finalmente, si (x) es una proposición que contiene a la variable x, **(E)** (x) quiere decir "hay un objeto x tal que $\mathbf{f}(x)$".)

Además, es necesario introducir un sistema de puntos que sustituyan a las marcas de puntuación del lenguaje ordinario. Un sistema de dos puntos es una marca de puntuación más fuerte que un sistema de un punto y, en general, un sistema arbitrario de puntos es más fuerte que un sistema con un número menor de puntos (Así, en los ejemplos anteriores habría sido necesario, para escribir las cosas correctamente, hacer que un sistema de puntos más grande que cualquier otro apareciendo en **P** siguiera al símbolo $\sim$ y lo mismo para los signos **V** y **(E*x*)**. En la práctica, sin embargo, empleamos reglas que son un poco más complicadas para poder evitar el uso de un número demasiado grande de puntos en las proposiciones.)

Los autores de *Principia Mathematica* muestran, luego, como todas las oraciones pueden ser traducidas usando estos signos. Por ejemplo, "**P** implica **Q**" se traduce como (es falso que **P** o **Q**). Asi, de ahora en adelante escribiremos **P** $\supset$ **Q** en lugar de **P**.**V** **Q** introduciendo el signo " ". Pero este signo no es esencialmente diferente de los otros; debe ser considerado como una abreviación y se supone implícitamente que debe ser sustituído por su definición. De la misma manera, "**P** y **Q**" se traduce como $\sim$: $\sim$ **P**.**V**. $\sim$ **Q** (es falso que **P** es falso o que **Q** es falso), y escribimos **P&Q** como abreviación. "Para toda *x*, **f**(*x*)" se traduce como $\sim$:(**E***x*). $\sim$ **f**(*x*) (es falso que exista una *x* para la que **f**(*x*) sea falsa) y se abrevia (*x*).**f**(*x*). No podemos indicar, con más detalle, como proceder en todos los casos; pero podemos llegar a la conclusión de que es inútil introducir otros signos que $\sim$. **V**, y (**E***x*) para poder traducir todas las proposiciones posibles. De aquí en adelante supondremos implícitamente que todas las proposiciones matemáticas que se consideren están escritas en este lenguaje.

Ahora que poseemos un instrumento más conveniente y simple que el lenguaje ordinario, nos preguntamos bajo qué condiciones una proposición es verdadera en una teoría dada; en otras palabras, deberíamos analizar las reglas de razonamiento. La mayor parte de este trabajo fue realizada por Russell y Whitehead. Recordemos, en primer lugar, que todo razonamiento que un matemático puede llevar a cabo en una teoría dada puede ser efectuado suponiendo que ciertas proposiciones son verdaderas — estas proposiciones, fijadas previamente, dependen de la teoría y se les llama "hipótesis " de la teoría (o "axiomas" de la teoría, los dos términos tienen el mismo sentido para nosotros) — y deduciendo otra proposiciones verdaderas de éstas por medios puramente ló-

gicos, por medio de reglas universales de razonamiento que son independientes de la teoría bajo consideración. Supongamos que todas estas hipótesis están escritas en nuestro nuevo lenguaje. Puede haber un número finito de éstas; es esencial hacer notar que puede haber también una infinidad. Un ejemplo de esto es lo que se llama "axioma de inducción matemática" en la aritmética y que establece que si una propiedad es verdadera para 0 y, cada vez que es verdadera para x lo es también para $x \sim 1$, entonces la propiedad es verdadera para todo número. Cuando este axioma se usa, se usa sólo para ciertas propiedades; por lo tanto, el axioma hace surgir tantos axiomas como propiedades a las que puede aplicarse y por lo tanto es una matriz que incluye una infinidad de axiomas y no un axioma propiamente dicho.

Nos quedan por encontrar todas las reglas universales de razonamiento. Los autores de *Principia Mathematica* muestran que éstas pueden reducirse a un número muy pequeño y su investigación nos permite mostrar que todo razonamiento puede ser llevado a cabo usando sólo las reglas siguientes; todas las demás pueden deducirse de éstas:

Regla 1. Las proposiciones verdaderas se obtienen sustituyendo p, q y r en las siguientes proposiciones por cualquier otra proposición:

p **V** p. ⊃ p, p ⊃ . p **V** q, p. **V**. q **V** r: ⊃ : q. **V**. p **V** q,
q ⊃ r. ⊃ : p V q . ⊃ . p V r

Regla 2. Si **P** es verdadera y si **P**⊃ **Q** es verdadera, entonces **Q** es verdadera, donde **P** y **Q** denotan proposiciones.

Regla 3. Si **f**(x) es una proposición verdadera, donde x es una variable, entonces (x).**f**(x) es una proposición verdadera.

Regla 4. Si **f**(xy) es una proposición que contiene a los objetos x y y (donde x es una variable y y un objeto determinado o una variable) que se vuelve verdadera cuando x es sustituída por y, entonces (**E**x).**f**(xy) es una proposición verdadera.

Regla 5. Una proposición sigue siendo verdadera cuando en ella (**E**x).**f**(x)**V**p se cambia por (**E**x)f(x).**V**p o (**E**x).**f**(x)**&**p por (**E**x)**f**(x).**&**p o, inversamente, donde p es una proposición que no contiene a x y **f**(x) una proposición que contiene a x.

Supongamos, por ejemplo, que buscamos las proposiciones que son verdaderas cuando no hay hipótesis; en cierto sentido, entonces, estas serían las que son verdaderas independientemente de las proposiciones atómicas de que se formen. Estas se llaman "identidades"; proposiciones que son verdaderas según la Regla 1 son

ejemplos de ello. Se ve que todas las otras identidades se pueden formar empezando con éstas y haciendo uso de las otras cuatro reglas. Una teoría matemática se caracteriza ahora por sus hipótesis y todos los teoremas verdaderos en esta teoría se pueden obtener a partir de las hipótesis y de las identidades dadas por la Regla 1 usando las Reglas 2, 3, 4 y 5.

Consecuentemente, podemos razonar con los signos de nuestro lenguaje sin hacer referencia, en cada momento, a su significado en el lenguaje ordinario. Podemos operar de una manera puramente mecánica sin preocuparnos por el origen de los signos con que tratamos; llegamos a una especie de álgebra en la que todas las matemáticas pueden hacerse.

Este es el primer paso que debe tomarse —más aún, no se le debe todo a Hilbert que, en esto, tomó prestado a sus predecesores— para poder plantear los problemas fundamentales de las metamatemáticas. Una objeción surge al respecto: podemos preguntarnos como tenemos la seguridad de que *todas* las oraciones que pueden formarse en una teoría matemática son combinaciones de signos y de que *todas* las reglas de razonamiento que se pueden usar son las reglas que hemos indicado. Debemos reconocer que sólo tenemos una certeza experimental de ello y que se debe esencialmente a la existencia de *Principia Mathematica* — los autores de este trabajo han tenido éxito en reconstruir todo el fundamento de las matemáticas e, incluso, en desarrollar ciertas teorías de manera bastante avanzada. Por supuesto, no tenemos ninguna razón *a priori* para creer que estas reglas bastan en todo caso; pero tenemos la casi absoluta certeza de que todo argumento que hasta ahora ha sido considerado corrrecto en matemáticas puede ser llevado a cabo usándolas. Más aún, si algunos matemáticos, muy exigentes o no demasiado exigentes, quieren cambiarlas, el principio de los métodos descritos será siempre aplicable a las teorías que construye; solamente su uso se modificará. Por el momento, nos limitamos a teorías que se usan ordinariamente y podemos estar ciertos de que para éstas hemos tenido éxito en la tarea de proveer una traducción fiel y cierta.

Hasta aquí sólo hemos reemplazado el lenguaje ordinario con otro más conveniente, esto no nos ayuda, en modo alguno, con los problemas que tienen que ver con los principios de las matemáticas. Hilbert buscó resolver las cuestiones que se pueden plantear dedicándose al estudio de las colecciones de signos que son traducciones de proposiciones verdaderas en determinada teoría. Pero

quiso llevar a cabo este estudio satisfaciendo los requerimientos del más absoluto rigor. Deseó evitar todas las objeciones que los más severos críticos de los métodos matemáticos ordinarios habrían levantado. Se restringió al empleo de modos de razonamiento tan inmediatos que fuesen convincentes en todos los casos en que se usan.

El siguiente es el tipo de razonamieno que debe ser usado: consideremos una teoría matemática determinada y busquemos asegurarnos que todas las proposiciones que son verdaderas en esta teoría tienen una cierta propiedad A (esta propiedad es diferente en cada caso particular y caracteriza el caso). Primero habremos de pedir que siempre seamos capaces de determinar si cierta proposición tiene o no esta propiedad e incluso debemos tener el cuidado de indicar, de hecho, las operaciones que deben efectuarse para determinarlo. Entonces será necesario demostrar que todas las hipótesis de esta teoría y todas las proposiciones que son identidades según la primera regla, tienen la propiedad A; esto debe mostrarse por medio de un argumento que es descrito en detalle y que puede ser repetido, de hecho, para cualquier proposición arbitraria. Por último, se mostrará que si ciertas proposiciones tienen la propiedad A, la tendrán también todas las proposiciones derivables de ellas al aplicar las reglas 2-5; esto también se puede mostrar por medio de un argumento que puede repetirse en cada caso particular. Consideremos ahora un argumento hecho en esta teoría: se empieza en las hipótesis y se llega a una conclusión repitiendo las reglas de razonamiento. Para cada proposición intermedia verdadera que se introduzca en la argumentación, vale la propiedad A, y esto puede verificarse de hecho en cada paso del argumento. Al final de cierto número de pasos, que depende de la longitud del argumento, llegamos a una conclusión que, por ende, tiene tambíen la propiedad A. Por lo tanto, todas las proposiciones verdaderas de esta teoría tienen esta propiedad. Podemos establecer esto para cada argumento definido y esta prueba metamatemática no es otra cosa que un método práctico —un manual de operaciones— que sin duda alguna nos permite llevar a cabo la verificación.

Todo el razonamiento metamatemático se hace según el modelo anterior, escogiendo propiedades adecuadas A. Examinaremos dos de los problemas principales que surgen en el estudio de las teorías matemáticas a la luz de este método: hablamos de la consistencia y del tercero excluído. En primer lugar, definamos dos

términos que usaremos con frecuencia. Decimos que una teoría es *inconsistente* si es posible probar en ella tanto un teorema como su negación; por lo tanto, para alguna proposición **P**, **P** y ~**P** son verdaderas en la teoría. Podemos ver con facilidad que si es posible probar tanto **P** como ~**P** para una proposición **P**, entonces, es posible deducir de ello la verdad de toda proposición.[4] Así, si **P** es verdadera en una teoría, añadiendo ~**P** a las hipótesis de la teoría obtenemos otra en la que toda proposición es verdadera. Esto se traduce frecuentemente diciendo que todo resultado, verdadero o falso, puede deducirse de un resultado falso.

Decimos que una teoría es *completa* si para toda proposición **P** podemos probar **P** o ~**P**. Saber que una teoría no es completa quiere decir que podemos encontrar una proposicíon **P** tal que ni **P** ni ~**P** es verdadera en la teoría. Podemos demostrar, luego, que dos teorías, ambas consistentes, pueden obtenerse añadiendo **P** o ~**P** a las hipótesis. Inversamente, si podemos hacer esto, entonces la teoría en consideración no es completa. Nos vemos remitidos, pues, al problema de la consistencia para poder demostrar que una teoría es completa.

Para probar que una teoría es consistente, debemos encontrar una propiedad A que satisfaga las condiciones que hemos indicado y, más aún, tal que, si **P** tiene esta propiedad, entonces ~**P** no la puede tener. Entonces no podríamos construir agumentos que nos permitiesen probar al mismo tiempo **P** y su negación ~**P** pues podríamos verificar, como ya se dijo, que **P** y ~**P** tendrían, ambas, la propiedad A, lo que es imposible.

Por otra parte, si queremos demostrar que una teoría no es consistente (o que una teoría es inconsistente), tenemos que encontrar una proposición **P** tal que tanto **P** como ~**P** sean demostrables; para probar que una teoría es completa, debemos encontrar un procedimiento que nos permita, siempre que sea dada una proposición **P**, probar **P** o ~**P**. Por lo tanto, tenemos un método que nos permite investigar si una teoría es inconsistente o no, completa o no. Mostraremos en qué condiciones tendremos que aplicar estos métodos.

Con frecuencia se adopta el punto de vista que afirma que, para que una teoría matemática no sea un vano juego de símbolos, una álgebra pura, como dijimos antes, debe ser la traducción de algo real; debe ocuparse de objetos que puedan ser concebidos, de hecho, por el entendimiento. Así, el estudio de los números dió lugar a la aritmética, el del espacio a la geometría, el del continuo al aná-

lisis y el de los conjuntos a la teoría de conjuntos. En este caso, las proposiciones atómicas de la teoría deben corresponder a propiedades fundamentales que los objetos considerados puedan tener y las relaciones fundamentales que existan entre ellos; las hipótesis deben corresponder a las proposiciones fundamentales que sean verdaderas para ellos. Sin embargo, es necesario estar alerta pues nunca podremos estar seguros que esta traducción no sea infiel y que no se revelará como insuficiente en algún momento. La teoría de conjuntos nos da un ejemplo bien conocido de ésto y mostró que es necesario ser prudente antes de afirmar que tal o cual propiedad es intuitivamente cierta para los objetos que se están considerando. La cuestión del postulado de Euclides ya había mostrado esto un siglo antes pero no de una manera tan urgente. El primer ejemplo nos da un caso en el que las pruebas de consistencia serían útiles para disipar las últimas dudas; el segundo ejemplo es uno en que es necesario mostrar que una teoría no es completa y que ha sido resuelto sin la ayuda de la metamatemática,[5] si bien de una manera insuficiente al mostrar que las geometrías de Euclides y Bolyai son, o ambas inconsistentes o ambas consistentes. Nada nos ha mostrado que problemas similares no surgen en teorías que se nos presentan como perfectas, por ejemplo, la aritmética.

¿Es posible que la aritmética no sea consistente? Sabemos que Brouwer afirma que es ilegítimo razonar acerca del conjunto de todos los enteros, le parece que la noción, en sí misma, no es suficientemente clara ni está suficientemente presente en nuestra intuición. En consecuencia, no es imposible que el razonamiento que se lleva a cabo usándolo no nos conduzca a contradicción. Podemos preguntarnos, también, si la aritmética es una teoría completa. Por ejemplo, consideremos el famoso teorema de Fermat que afirma que es imposible encontrar cuatro enteros x, y,z & n (mayor que 2) tales que

$$x^n+y^n = z^n. \textbf{(A)}$$

No sería absurdo que fuera imposible demostrar este teorema y que fuera imposible probar que es falso. Esto nos mostraría, simplemente, que no tenemos un noción suficientemente precisa de la totalidad de todos los enteros y podríamos concluir de ello que es posible desarrollar dos aritméticas, ambas consistentes, tales que el teorema de Fermat se suponga verdadero en una y no ver-

dadero en la otra. Por supuesto, en una de estas teorías nos veríamos llevados a suponer que existen cuatro números x, y, z & n tales que **(A)** vale para n mayor que dos sin ser capaces de dar los valores de estos cuatro números, pero no sería inconsistente suponer que existen. Problemas similares surgen en teoría de conjuntos y, de manera más urgente que en la aritmética. Hasta ahora, solo los métodos metamatemáticos han permitido que estas cuestiones sean tomadas en consideración y que se pueda empezar a darles respuesta.

El problema de la consistencia también aparece desde un punto de vista que es puramente matemático. Consideremos nuevamente el teorema de Fermat; supongamos que lo hemos demostrado usando argumentos que Brouwer considera ilegítimos y que, sin embargo, los matemáticos usan todo el tiempo; por ejemplo, trayendo a colación la colección de todos los enteros o de todos los números racionales o irracionales. Supongamos también que hemos podido probar metamatemáticamente que la teoría obtenida usando estas nociones es consistente. Estaríamos seguros, entonces que es imposible encontrar de hecho, cuatro números tales que **(A)** con n mayor que 2 pues esto implicará la inconsistencia de este sistema y un argumento que satisface todos los requerimientos de Brouwer ha mostrado que esto es imposible. Debemos concluir de ello que tenemos el derecho a utilizar estas nociones prohibidas pues todo resultado que se ha obtenido usándolas como pasos intermedios no puede ser falso. Solamente estas nociones deben ser consideradas por Brouwer como elementos sin significado real, como elementos ideales —como los llama Hilbert. De esta manera, el fundador de la metamatemática siente que ha reconciliado los requerimientos del intuicionista que comparte el punto de vista de Brouwer y los de los matemáticos que no quieren abandonar ninguno de sus métodos usuales.

La cuestión del tercero excluído se trata también fácilmente. El principio del tercero excluído asegura que, dada una proposición **P**, **P** es verdadera o $\sim$**P** lo es. Es decir, **P** V $\sim$**P** es una proposición verdadera en toda teoría. De hecho, esto se sigue sin dificultad de nuestras propias reglas de razonamiento que permiten que el principio sea usado en toda teoría. En general, el principio se usa del siguiente modo: suponemos sucesivamente que **P** es verdadera y que **P** es falsa y mostramos que en cualquier caso podemos deducir una proposición **Q** del supuesto. De aquí concluímos que **Q** es verdadera en esta teoría. Por lo tanto podemos usar el principio

en cualquier teoría en la que nuestras reglas de razonamiento no conduzcan a una contradicción. Pero de ello no resulta que **P** sea demostrable o que ~**P** sea demostrable: la teoría puede ser incompleta. En otras palabras, es posible que ni **P** ni ~**P** sean verdad; sin embargo, podemos suponer, sucesivamente, que **P** es verdadera y que **P** es falsa en cualquier argumento. Nos vemos conducidos a dos sentidos distintos del tercero excluído: uno puramente matemático traducido por el hecho de que **P**V~**P** es una identidad; otro metamatemático que conduce a la cuestión de saber si una teoría es completa.

Tal es la forma general de esta nueva lógica. Busca examinar, solamente, teorías existentes y estudia las características de las proposiciones verdaderas en ellas. No toma parte en las discusiones que estas teorías hacen surgir y no busca desacreditarlas. Se limita a indicar que los resultados obtenidos por medio del razonamiento conducido de tal y tal manera tienen tales y tales propiedades. Hemos indicado solamente su aplicación a las teorías matemáticas usuales. Pero supongamos que estamos trabajando en una teoría para la que las reglas ordinarias de razonamiento se han modificado; en ese caso, como hemos apuntado, una vez que estas reglas han sido formulada, los métodos de la metamatemática siguen siendo aplicables y nos permiten el estudio de tales teorías. La metamatemática, en modo alguno, busca saber si una teoría dada describe las propiedades de un objeto particular de manera conveniente, tampoco si corresponden a algo real; más aún, no lo podrían hacer. Desde el punto de vista metamatemático, todas las teorías tienen el mismo derecho a ser citadas.

Esta posición agnóstica puede desagradar a muchos pero no debe ocultarse que, quizá, el papel de las matemáticas es simplemente proveernos con formas y argumentos y no el de buscar cuáles de estos se aplican a cuáles objetos. Así como el matemático que estudia la ecuación de propagación de onda ya no se pregunta si hay ondas en la naturaleza que satisfacen esta ecuación, ya no se pregunta cuando estudia aritmética o teoría de conjuntos si los conjuntos o los números en los que piensa intuitivamente satisfacen las hipótesis de la teoría que está considerando. Debía preocuparse con el desarrollo de las consecuencias de estas hipótesis y con presentarlas de la manera más sugestiva. El resto es asunto de físicos o de filósofos.

Los resultados que se han obtenido, hasta ahora, con estos nuevos métodos son todavía pocos; hay más esperanzas que realiza-

ciones. Podemos atribuirlo sólo a la extrema dificultad de los problemas que surgen. De todas las teorías matemáticas usuales, sólo se ha mostrado la consistencia de la aritmética y ello solamente con ciertas restricciones en cuanto al uso del axioma de inducción matemática. Hace cinco años, Hilbert anunció que había probado la consistencia del análisis e incluso de la teoría de conjuntos con una hipótesis bien conocida, la hipótesis del continuo, pero estas demostraciones no fueron publicadas y parecen tener serias dificultades. Hay, sin embargo, otro punto de vista para llevar a cabo este trabajo y en según el cual se han obtenido resultados alentadores: el estudio de lo que los alemanes llaman el *Entscheidungsproblem* que consiste en buscar un método que nos permita reconocer con certeza (al cabo de un número de operaciones que puede ser determinado de antemano) si una proposición es una identidad y, si lo es, encontrar una prueba de la proposición. La solución a este problema nos permitiría reconocer si una proposición es verdadera en una teoría determinada que tenga un número finito de hipótesis pues puede probarse fácilmente que si la prueba de una proposición **P** hace uso de las hipótesis $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$,...,$\mathbf{H_n}$, entonces $\mathbf{H_1 \& H_2 \& ... \& H_n}$. **P** es una identidad e, inversamente, si tal proposición es una identidad, entonces **P** es verdadera en la teoría considerada. En particular, seríamos capaces de reconocer, entonces, si la teoría es o no consistente.[6] Y, en general, podemos maquinar de manera tal que hagamos que todos los argumentos matemáticos usuales en teorías que sólo tengan un número finito de hipótesis. Con ello, podemos ver la importancia del problema cuya solución nos permitiría decidir con certeza acerca de la verdad de una proposición en una teoría determinada. Esto nos daría un método general para las matemáticas que permitiría que la lógica matemática jugara el mismo papel frente a las matemáticas ordinarias que la geometría analítica juega *vis-à-vis* la geometría euclideana. Este problema está lejos de resolverse; solamente se ha tratado, hasta el momento, en casos particulares. En todo caso, el problema puede ser reducido a un problema aritmético y un estudio profundo de esta reducción nos da resultados curiosos acerca de la estructura de todas las demostraciones matemáticas y las cuestiones relacionadas con las paradojas que se obtienen al considerar el "conjunto" de todos los números que pueden ser definidos con un número finito de palabras.[7] Pero no podemos investigar estas cuestiones aquí sin rebasar los límites que nos hemos impuesto.

Estos son los métodos de la metamatemática y la dirección en que apunta. Hasta ahora, sólo se han dado los primeros pasos; regiones inmensas permanece inexploradas. Pero los resultados ya obtenidos bastan para mostrar el valor inmenso de esta doctrina; sólo la metamatemática basta para dar respuestas decisivas a preguntas que hasta ahora parecían escapar a todo tratamiento positivo. Posiblemente su influencia se extienda poco a poco a todas las ramas de las matemáticas y nos de métodos para ellas. Percatarnos de su gran ambición, la solución al *Entscheidungsproblem* tendrá una repercusión considerable, posiblemente tanto por sus consecuencias prácticas como por las cuestiones de principio cuya solución permitiría. Sin embargo, no parece que esta meta pueda alcanzarse en el futuro cercano; todos los esfuerzos que se han hecho en esta dirección sólo han tenido éxito en plantear la dificultad del problema de una manera más precisa. Pero esta ciencia se inauguró ayer y sus principios ya nos permiten predecir el papel que está llamada a jugar.

Notas:

* Trabajo que se publica en este volumen.

** Des Esseintes es el personaje decadente y estético de una novela de J.K. Huysmans.

[1] Desearemos hablar de propiedades que pueden o no ser verdaderas para un objeto determinado. Por ejemplo, la propiedad de un número de ser diferente de 0. De esta manera, una relación entre dos objetos es una relación de esta pareja de objetos.

[2] Todos los matemáticos que se han ocupado de estas cuestiones han usado diferentes métodos de exposición de este lenguaje simbólico y sus reglas de razonamiento (si bien son equivalentes). Aquí usamos el método que nos parece más simple.

[3] Hemos utlizado la notación presentada en el texto original en francés (N. E.).

[4] Pues, como Russell y Whitehead demostraron, **P** : **P. Q** es una identidad. Consecuentemente, basta aplicar la segunda regla de razonamiento para llegar a la conclusión del texto.

[5] Un cierto número de argumentos que ahora consideramos como metamatemáticos ya habían sido elaborados de una manera más o menos completa antes de la invención de las metamatemáticas. Estos consistían, por lo regular, en mostrar que ciertas teorías son consistentes o incompletas si otras teorías, como la aritmética,se suponen consistentes. Pero solo las metamatemáticas nos permiten plantear estos problemas claramente en todos los casos.

[6] Sea **P** una proposición verdadera en la teoría. De lo que hemos dicho en la definición de consistencia, es necesario y suficiente para que la teoría sea inconsistente que **P** sea verdadera en la teoría.

[7] Estamos aludiendo aquí, a la paradoja de Skolem según la cual toda teoría

matematica puede ser llevada a cabo considerando solamente los objetos de un conjunto numerable. Pero una discusión de la importancia y sentido correcto de esta proposición nos llevaría muy lejos. Detalles suplementarios sobre esta cuestión pueden encontrarse en el trabajo de Hilbert y Ackerman (1928, p. 80), que contiene, también, una bibliografía completa y, en el capítulo 5 de nuestra tesis que aparecerá pronto. Estos dos trabajos y los artículos de Hilbert pueden ser consultados para una exposición detallada de las metamatematicas; más aún, nuestro 1929b puede ser consultado en relación al *Entscheidungsproblem*.

Matemáticas y realidad.

Albert Lautman

Los logicistas de la Escuela de Viena pretenden que el estudio formal del lenguaje científico debe ser el único objeto de la filosofía de las ciencias. Se trata de una tesis difícil de admitir por parte de aquellos filósofos que consideran que su tarea esencial es la de establecer una teoría coherente acerca de las relaciones entre la lógica y lo real. Hay un real físico y el milagro que debe explicarse es que se requiera de las teorías matemáticas más desarrolladas para interpretarlo. Hay, del mismo modo, un real matemático y es igualmente admirable ver como dominios enteros resisten toda exploración hasta que se les aborda con métodos nuevos. Fue así que el análisis se introdujo en la aritmética o la topología en la teoría de funciones. Una filosofía de las ciencias que no tuviese que ver con el estudio de esta solidaridad entre dominios de la realidad y métodos de investigación estaría singularmente desprovista de interés. En efecto, el filósofo, por naturaleza, no es matemático. Si el rigor lógico-matemático pueden seducirlo, no es, ciertamente, porque le permita establecer un sistema de proposiciones tautológicas sino porque ilumina los vínculos entre las reglas y sus dominios. Se produce, incluso, el hecho curioso de que aquello que para los lógicos es el obstáculo a eliminar deviene, para el filósofo, el objeto más alto de su interés. Se trata de todas las implicaciones "materiales" o "realistas" que la logística se ve forzada a admitir: son los axiomas bien conocidos de Russell, los axiomas del infinito y el de reducibilidad. La afirmación de que a toda proposición verdadera corrresponde un evento en el mundo implica, sobre todo en los trabajos de Wittgenstein, todo un cortejo de restricciones y precauciones para la lógica. En particular, toda proposición que se refiere al conjunto de proposiciones y toda sintáxis lógica —en el sentido de Carnap— son imposibles pues sería necesario, correlativamente, poder considerar al mundo como una totalidad, lo cual es ilegítimo.

Mathesis, 5 (1989) 557-560

Los logicistas de la escuela de Viena afirman siempre su acuerdo pleno con la escuela de Hilbert. Sin embargo, nada es más discutible. En la escuela logicista, que sigue a Russell, los esfuerzos se encaminan a encontrar los constituyentes atómicos de todas las proposiciones matemáticas. Las operaciones de la aritmética se definen a partir de las nociones primitivas de elemento y de clase y los conceptos del análisis se definen por extensión a partir de la aritmética. La noción de número juega en ello un papel capital y este papel se ve robustecido por la aritmetización de la lógica según los trabajos de Gödel y Carnap. Esta primacía de la noción de número no parece, empero, estar confirmada por el desarrollo de las matemáticas modernas. Poincaré ya había indicado, a propósito de las teorías de la dimensión, que la aritmetización de las matemáticas no correspondía siempre a la verdadera naturaleza de las cosas. Hermann Weyl ha establecido, en la introducción de su libro *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, una distinción que nos parece fundamental y que debe tomarse en cuenta en el futuro de toda filosofía de las matemáticas. Distingue dos corrientes en el seno de las matemáticas: una surgida de la India y de los árabes que pone de relieve la noción de número y culmina en la teoría de funciones de variable compleja y otra que está constituída por el punto de vista griego que quiere que cada dominio conlleve, en sí mismo, un sistema de números característico. Se trata del primado de la idea geométrica de dominio sobre la de número entero.

La axiomática de Hilbert y sus discípulos, lejos de querer reducir al conjunto de las matemáticas a una "promoción" de la aritmética, tiende, por el contrario, a separar, para cada dominio estudiado, un sistema de axiomas tal que la reunión de las condiciones implicadas en ellos haga surgir, de manera simultánea, un *dominio* y un conjunto de operaciones válidas en este dominio. Así se constituyen, axiomáticamente, en el álgebra moderna, la teoría de grupos, de ideales, de sistemas de números hipercomplejos, etc.

La consideración de una matemática puramente formal debe, por lo tanto, dar lugar a un dualismo entre la estructura topológica y las propiedades funcionales relacionadas con esa estructura. La presentación formalista de teorías axiomatizadas de manera parecida es una cuestión del más grande rigor. El objeto estudiado no es el conjunto de proposiciones derivadas de los axiomas sino los seres organizados, de estructuras completas que tienen algo así como una anatomía y una fisiología propias. Citemos como ejem-

plo el espacio de Hilbert definido por los axiomas que le confieren una estructura apropiada para la solución de ecuaciones integrales. El punto de vista que es importante en esto, es el de la síntesis de las condiciones necesarias y no el del análisis de las nociones primitivas.

Esta misma síntesis entre la operación y su dominio se encuentra, también, en la física bajo un punto de vista ligeramente diferente. En ocasiones, Carnap parece considerar las relaciones entre física y matemáticas como si se tratara de relaciones entre forma y materia. Las matemáticas proveerían el sistema de coordenadas en donde se inscribirían los fenómenos físicos. Esta concepción es difícilmente defendible pues la física moderna, lejos de mantener la distinción entre una forma geométrica y una materia física, reúne, por el contrario, datos espacio-temporales y datos materiales en la armadura común de un modo de representación sintético de los fenómenos; ya sea por medio de la representación tensorial de la teoría de la relatividad o por medio de las ecuaciones hamiltonianas de la mecánica. Presenciamos asi, para cada sistema, una determinación simultánea y recíproca del contenido y el continente. Se trata, nuevamente, de una determinación propia de cada dominio al interior de los cuales ya no subsiste la distinción entre forma y materia. Carnap parece tener en verdad, otra teoría acerca de las relaciones entre las matemáticas y la física, mucho más conforme con su tendencia logicista. Considera a la física, no como ciencia de los hechos reales, sino como un lenguaje en el que se expresan enunciados verificables experimentalmente. Este lenguaje está sometido a las reglas de la sintáxis, reglas de naturaleza matemática pues son válidas uniformemente en todo su dominio de definición; reglas de naturaleza física pues su determinación varía con la experiencia. Encontramos aquí, nuevamente la afirmación acerca de la universalidad de las leyes matemáticas en oposición a la variabilidad de los datos físicos. Nos parece que esta concepción no da cuenta del hecho de que esta variación de los datos físicos carece de sentido excepto en relación con la elección previa de las magnitudes susceptibles de variación y que esta elección constituye a la física. El ejemplo de Carnap en *Logische Syntax der Sprache* (p. 131) es característico. Puesto que, dice, las componentes del tensor fundamental métrico son constantes, se trata de una ley matemática; puesto que varían, obedecen a una ley física. El verdadero problema filosófico sería, más bien, saber cómo una geometría diferencial puede convertirse en teoría gra-

vitacional. Este acuerdo entre geometría y física es la prueba de intelegibilidad del universo. Resulta de la puesta a punto, por el espíritu, de un modo de estructurar el universo en armonía profunda con la estructura de este universo. Es concebible que esta penetración de lo real por la inteligencia humana carezca de sentido para los formalistas a ultranza. Estos, en efecto, verían, más bien, en las pretensiones del espíritu por conocer la naturaleza, una marcha que reanima los estudios de Lévy-Bruhl. Comprender sería, para ellos, una experiencia mística análoga a la participación del sujeto en el objeto en el alma primitiva. Sin embargo, el término de participación tiene, en filosofía, un origen distinto y más noble. Brunschvicg ha denunciado, con justicia, la confusión entre ambos sentidos. La participación de lo sensible en lo inteligible, en Platón, permite encontrar, tras los cambios de apariencia, las relaciones inteligibles entre las ideas. Si los primeros contactos con lo sensible no son sino sensaciones y emociones, la constitución de la física matemática nos da acceso a lo real por medio de la estructura de la que éste está dotado. Es, incluso, imposible, hablar de lo real independientemente de los modos del pensamiento según los cuales éste se deja aprehender y lejos de rebajar las matemáticas a ser tan sólo un lenguaje indiferente a la realidad que describe, el filósofo se compromete con él como con una actitud de meditación en la que habrán de aparecérsele los secretos de la naturaleza. No hay, pues, ninguna otra razón para mantener la distinción que hace la Escuela de Viena entre conocimiento racional y experiencia intuitiva, entre *Erkennen* (conocimiento) y *Erleben* (experiencia). Al querer suprimir los vínculos entre el pensamiento y lo real, como si se tratara de negarle a la ciencia el valor de una experiencia espiritual, se corre el riesgo de no tener sino una sombra de ciencia y de rechazar el espíritu de interrogación de lo real en favor de actitudes violentas en que la razón no tiene parte alguna. Este es un abandono que la filosofía de las ciencias no debe aceptar.

El pensamiento matemático

Jean Cavaillès y Albert Lautman

Dos tesis de la más alta importancia, fueron defendidas recientemente en la Facultad de Letras de la Universidad de París (se trata de trabajos) sobre la filosofía de las matemáticas consideradas desde el punto de vista del desarrollo que han alcanzado actualmente. La Sociedad de Filosofía estimó que tenía interés discutirlas simultáneamente; agradece a los autores el haberse prestado a esta iniciativa.

Cavaillès parte del problema del fundamento de las Matemáticas tal como se propone actualmente y como se resuelve parcialmente. En efecto, la crisis de la Teoría de Conjuntos ha traído, como resultado, tras los trabajos de Bertrand Russell y de Hilbert, la transformación del problema epistemológico en problema matemático sometido a las sanciones habituales de la técnica. Así, se encuentran hoy eliminadas dos concepciones de las matemáticas:

1. El logicismo (<las matemáticas son parte de la lógica>) pues la formalización efectiva de las matemáticas ha mostrado que,

a. en realidad no se recurría a nociones u operaciones puramente lógicas (el problema del sentido de tales nociones y operaciones se había dejado de lado), sino que las consideraciones utilizadas, todas homogéneas, pertenecían al cálculo combinatorio o a otras teorías matemáticas (el sentido de un símbolo es su modo de empleo en un sistema formal);

b. es imposible, en virtud de un teorema de Goedel, insertar a las matemáticas en un sistema formal único: todo sistema que contiene a la Aritmética es necesariamente no-saturado (es decir, es posible construir en él una proposición que no es ni refutable ni demostrable en el sistema).

2. La concepción hipotético-deductiva, presentada con el máximo de precisión en el formalismo radical de von Neumann. En efecto, no se puede caracterizar una teoría matemática —sistema de axiomas y reglas arbitrariamente planteadas (según esta con-

Mathesis, 5 (1989) 561-577

cepción)— como sistema deductivo si no es por el uso de teorías matemáticas constituídas y que no han sido caracterizadas de esta suerte de manera previa (por ejemplo, para la teoría de números, la demostración de no contradicción de Gentzen que utiliza la recurrencia transfinita). En otros términos: (hay una) solidaridad esencial entre las partes de las Matemáticas y la imposibilidad de una regresión que quiera encontrar un punto de partida absoluto.

Cavaillès llega a las siguientes afirmaciones:

1. Las Matemáticas constituyen un devenir singular. No sólo es imposible reducirlas a otra cosa que ellas mismas, sino que toda definición, en una época dada, es relativa a la época, es decir, a la historia de la que es la culminación: no hay definición eterna. Hablar de matemáticas es reconstruirlas. Este devenir parece autónomo: al epistemólogo le parece posible reencontrar en los accidentes históricos un encadenamiento necesario; las nociones introducidas son exigidas por la solución de un problema y, en virtud de su presencia entre las soluciones anteriores, plantean, a su vez, nuevos problemas. Hay, verdaderamente, un devenir: el matemático está embarcado en una aventura que no puede suspender sino arbitrariamente y en la que cada instante le procura una novedad radical.

2. La solución de un problema posee todas las características de una experiencia: construcción sometida a la sanción de un fracaso posible pero cumplida según una regla (es decir, repetible y por lo tanto, evento) y desarrollándose, en fin, en lo sensible. Las operaciones y las reglas sólo tienen sentido relativamente a un sistema matemático anterior: no hay representación efectivamente pensada (distinta de lo vivido puro) que no sea sistema matemático en la medida en que está pensada. Es decir, organización regulada de lo sensible (en virtud de la continuidad entre gestos matemáticos, desde los más elementales).

3. La existencia de objetos es correlativa a la actualización de un método y, como tal, no categórica sino siempre dependiente de la experiencia fundamental de un pensamiento efectivo: La ilusión de una posibilidad de descripción exhaustiva (o de generación ex nihilo) por medio de axiomas, desenmascarada por la paradoja de Skolem, se explica por el defasamiento necesario entre exposición y pensamiento auténtico. Este, o intuición central de un método, para expresarse, exigiría unas Matemáticas acabadas (explicación de todas las exigencias sucesivas). Los objetos figuran las proyecciones en la representación de las etapas de un desarrollo

dialéctico: hay, para ellos, cada vez, un criterio de evidencia condicionado por el método mismo (ejemplo: la evidencia propia a la inducción transfinita). No son, pues, ni en sí ni en el mundo de lo vivido; son, más bien, la realidad misma del acto del conocimiento.

Lautman esta enteramente de acuerdo con Cavaillès sobre la solidaridad que une a la naturaleza del objeto con la experiencia singular de su elaboración en el tiempo. No hay determinación de lo verdadero y de lo falso excepto en el seno de las Matemáticas efectivas y la verdad es inmanente a la demostración rigurosa. Pero a partir de este punto, Lautman se aleja de Cavaillès. Si se admite que la manifestación de un existente en acto no alcanza su sentido más que como respuesta a un problema previo que concierne a la posibilidad de este existente, el establecimiento de relaciones matemáticas efectivas aparece, en efecto, como racionalmente posterior al problema de la posibilidad de vinculaciones generales parecidas. El estudio del desarrollo de las Matemáticas contemporáneas muestra, por lo demás, cómo los resultados obtenidos se organizan bajo la unidad de ciertos temas que la filosofía interpreta en términos de vinculación posible entre las nociones de una Dialéctica ideal: la penetración de los métodos topológicos en Geometría diferencial responde al problema de las relaciones entre lo local y lo global, del todo y las partes; los teoremas de dualidad en Topología estudian la reducción de las propiedades extrínsecas de situación a propiedades intrínsecas de un ser matemático por las propiedades excepcionales que permiten la selección: la teoría analítica de los números muestra la función del continuo en el estudio de lo discontinuo, etc.

Encuentra, entonces, qué afinidades de estructura lógica permiten acercar teorías matemáticas diferentes por el hecho de que cada una de ellas aporta un esbozo de solución diferente a un mismo problema dialéctico. Es así, por ejemplo, que la teoría de campos —en donde se realiza un sistema de axiomas, en lógica matemática— y la teoría de representación de grupos abstractos permiten, una y otra, observar cómo se opera, en Matemáticas, el pasaje de un sistema formal a sus realizaciones materiales. Se ve en qué sentido se puede hablar de la participación de teorías matemáticas distintas en una dialéctica común que las domina.

Las Ideas de esta dialéctica deben ser concebidas como Ideas de relaciones eventuales entre nociones abstractas y su conocimiento no es la afirmación de ninguna situación efectiva. Como delimitación del campo de lo posible, la dialéctica es problemática pura,

esbozo de esquemas en donde el propósito tiene necesidad, para afirmarse, de tomar cuerpo en una materia matemática particular. Solamente esta indeterminación de la Dialéctica, por medio de la que se manifiesta su insuficiencia esencial asegura, al mismo tiempo, su exterioridad en relación con el devenir temporal de los conceptos científicos.

Se pueden, en conclusión, precisar los lazos de la Dialéctica y las Matemáticas. Las Matemáticas se presentan, ante todo, como ejemplos de encarnación, dominios en donde se actualiza la esfera ideal de relaciones posibles, pero estos son ejemplos privilegiados cuya aparición es necesaria. Todo esfuerzo para profundizar en el conocimiento de las Ideas, se prolonga naturalmente y sólo por ello es preocupación analítica en construcciones matemáticas efectivas. El pensamiento matemático tiene, por lo tanto, el papel eminente de ofrecer a la filosofía el espectáculo constantemente reiniciado de la génesis de lo Real a partir de la Idea.

ACTA DE LA SESIÓN

Comunicación de Cavaillès

Las reflexiones que quisiera presentar se sitúan en un momento dado del desarrollo de las Matemáticas, es decir, en el momento en que estamos. Implican, en razón de la singularidad misma de este momento, dos partes que he distinguido en el resumen que he enviado: una primera parte que incluye los resultados que nos han dado las Matemáticas mismas sobre el problema filosófico de la esencia del pensamiento matemático; sólo tenemos que traducir esta primera parte, explicitarla; podremos, posiblemente, discutir la importancia de los resultados pero yo creo que ésta es la parte incontestable de lo que propongo.

Pero esta parte es negativa y por ello me propongo, tras resumirla brevemente, introducir algunas reflexiones positivas que se enraizan tanto sobre los resultados obtenidos, como en el desarrollo actual de las Matemáticas tal como lo vemos ante nuestros ojos.

Insistiré poco acerca de la primera parte: no quiero, en particular, ligarla, tan precisamente como debiera, con etapas anteriores de la Filosofía matemática, especialmente a la del siglo XIX. Quiero indicar, solamente que en las matemáticas del siglo XIX, hemos sido llevados, por razones del desarrollo mismo de las dife-

rentes ramas de las Matemáticas y de la necesidad de abandonar la evidencia intuitiva a que se recurría anteriormente, a poner el acento sobre la noción de demostración. La evidencia cede a la demostrabilidad. De ahí la idea, que se ha extendido entre casi todos los matemáticos y que encontramos en investigadores tan disímbolos como Frege y Dedekind, de que las Matemáticas son una parte de la Lógica. Lo que asegura efectivamente los resultados es el carácter riguroso de las cadenas de razonamientos por medio de los que se les ha establecido.

Hay, por lo tanto, en esta época, un esfuerzo por reducir, no sólo todos los procedimientos de los matemáticos, sino también las nociones a las que recurren, a procedimientos y nociones puramente lógicas; esfuerzo que se ve ayudado por el desarrollo de la teoría de conjuntos que, por otra parte y en cierta medida, lo ha provocado.

Por aquí vemos cómo es posible el acercamiento pues la noción de conjunto misma parece la más lejana a una intuición cualquiera y puesto que, por otra parte, podía confundirse con la noción de clase o de extensión. Todavía en 1907, Zermelo, iniciaba su <Axiomatización de la teoría de conjuntos> escribiendo: "La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas a que se llega al estudiar matemáticamente los conceptos fundamentales de número, orden y función en su simplicidad primitiva y, por ahí, a desarrollar las bases lógicas de la aritmética entera y del análisis."

Aquí vemos cómo, todavía en 1907, es decir, después de la aparición de las más grandes paradojas, subsistía la esperanza de un teórico de los conjuntos como Zermelo, de fundamentar las matemáticas - es decir la aritmética y el análisis - sobre una noción puramente lógica.

Esta esperanza se vió frustada, no tanto como consecuencia de las dificultades que ha encontrado en esta época la teoría de conjuntos al descubrir las antinomias, sino como consecuencia del esfuerzo que los matemáticos mismos han hecho para decidir si esta esperanza podía realizarse o no, es decir, gracias al esfuerzo por medio del que se ha transformado una concepción filosófica de las Matemáticas en un problema técnico de matemáticos.

En efecto, cuando hemos querido precisar la noción de conjunto y de la teoría consecutiva, nos hemos visto en la necesidad de axiomatizar la teoría, es decir, en la necesidad de hacer un censo de las nociones fundamentales y de los procedimientos empleados. Nos encontramos, por lo tanto, ante problemas técnicos que

podrían recibir una respuesta precisa. Estos son los trabajos que llevó a cabo la escuela reunida en torno de Russell y la de Hilbert que en Francia fue iniciada, con un vigor genial por Jacques Herbrand: su ausencia, para quienes lo conocieron, tanto filósofos como matemáticos, se hace notar cruelmente todos los días, incluso hoy.

Los resultados han sido indicados en mi resumen: como nos enfrentabamos a un problema que podía ser resuelto de manera matemática, dos concepciones fundamentales de las Matemáticas se vieron rechazadas:

1. La concepción que citaba al comenzar, la famosa esperanza de reducir las Matemáticas a la Lógica; el logicismo ha sido eliminado. No insisto en las razones, las anoto en mi resumen y me permito referirlos, para los detalles, a mi libro *Método axiomático y formalismo*.

Al intentar formalizar íntegramente las Matemáticas, hemos llegado al resultado de que los procedimientos a los que se recurre no pueden, razonablemente, ser llamados lógicos. Creo que sería imprudente iniciar aquí un debate sobre la esencia misma del pensamiento lógico, ello nos llevaría demasiado lejos; pero puedo indicar, por lo menos, que si se formaliza la Aritmética, es necesario introducir el principio de inducción completa que difícilmente puede ser reducido a un sistema de nociones lógicas.

2. Es imposible insertar todas las Matemáticas en un sistema formal único. Este es el resultado que se sigue de un teorema que aparece en una memoria de Goedel publicada en 1931.

Queda una concepción posible: la famosa y vieja concepción de sistema hipotético-deductivo. No se trata de un sistema formal sino de la reunión de sistemas formales que son construídos arbitrariamente y que puede sobreponerse de manera tal que constituyan el conjunto de las Matemáticas.

Esta concepción hipotético-deductiva se encuentra también imposibilitada por otro teorema publicado por Goedel en la misma memoria: "La no contradicción de un sistema formal matemático que contenga a la teoría de los números se demuestra por medios matemáticos no representables en este sistema". Es, en consecuencia, absurdo, definir las Matemáticas como un conjunto de sistemas hipotético-deductivos puesto que, para caracterizar tales sistemas formales como sistemas deductivos es necesario emplear, ya, las Matemáticas.

Recuerdo, en particular que, si se considera el sistema formal

representado por la teoría de números, no poseemos una caracterización de este sistema como sistema deductivo: caracterizar un sistema como sistema deductivo es demostrar que en él no se puede demostrar todo, es demostrar su no contradicción. Tenemos la demostración debida a Gentzen que emplea la inducción transfinita, es decir, un procedimiento matemático exterior a la teoría de números.

Ya he dicho que la concepción más precisa de la representación hipotético-deductiva se debe a von Neumann. La idea de la escuela de Hilbert era ésta: evidentemente tenemos necesidad de nociones matemáticas para caracterizar un sistema formal, pero estas nociones son demasiado elementales. En el sistema hipotético-deductivo de los axiomas de Hilbert para la geometría euclideana las nociones son demasiado simples: número entero finito, correspondencia. Esto es ilusorio pues la no contradicción de los axiomas de Hilbert en la geometría euclideana no es demostrable sino por medio de la construcción de un sistema que se ha pedido prestado a la teoría de números y para ello, a su vez, debemos recurrir a la inducción transfinita.

He ahí los resultados. La filosofía puede preguntarse, ahora, en presencia también del desarrollo actual de las Matemáticas, qué conclusiones positivas pueden ser enunciadas.

Indico, inmediatamente que no pretendo dar a estas conclusiones una forma definitiva; es un trabajo muy difícil sobre el que no presento, por el momento, sino reflexiones que someto a ustedes; reflexiones que están todavía impregnadas del esfuerzo del trabajo; indico, ahora, los puntos a los que creo que se puede llegar con un máximo de certeza.

Primer punto: la idea de definir las Matemáticas debe ser rechazada: en razón de sus resultados —que acabo de señalar— y como consecuencia de una reflexión sobre el trabajo mismo del matemático.

Las Matemáticas constituyen un devenir, es decir, una realidad irreductible a algo que no sea ella misma. ¿Qué puede significar la empresa de definir las Matemáticas? Se trata: o de decir que las Matemáticas son algo que no es matemático, lo cual es absurdo, o bien de hacer un censo de los procedimientos utilizados por los matemáticos.

Dejo de lado la primera solución, incluso si cuenta todavía con defensores. Queda la segunda. Creo que ningún matemático aceptará que se haga un censo de manera definitiva y exhaustiva,

de los procedimientos que emplea. Se puede hacer un censo en un momento dado pero es absurdo decir: únicamente ésto es matemático y, al margen de estos procedimientos, no se hacen Matemáticas. Creo que aquí estoy de acuerdo, por un lado, con los resultados obtenidos, por ejemplo, con el carácter necesariamente no saturado de toda teoría matemática, que prueba la exigencia de la intervención de nuevas reglas de razonamiento cada vez que una teoría se desarrolla y, por otra parte, con la concepción de las Matemáticas que se encuentra en el intuicionismo, y Heyting, por ejemplo, escribía recientemente que las Matemáticas constituyen un sistema orgánico en pleno desarrollo, al que es imposible asignarle límites.

Las Matemáticas son un devenir. Todo lo que podemos hacer es intentar comprender su historia, es decir, situar a las Matemáticas entre otras actividades intelectuales, encontrar ciertas características de este devenir. Citaré dos:

1. Este devenir es autónomo, es decir, si bien es imposible colocarse fuera de él, es posible, al estudiar el desarrollo histórico, contingente, de las matemáticas, tal y como se nos presenta, percibir las necesidades bajo el encadenamiento de nociones y procedimientos. Aquí, evidentemente, la palabra <necesidad> no puede precisarse de otra manera. Anotamos los problemas y nos percatamos que estos problemas exigen la aparición de una nueva noción; es todo lo que podemos hacer y es cierto que el uso de la palabra <exigir> nos resulta demasiado fácil pues estamos del otro lado, vemos los éxitos. Podemos decir, por lo tanto, que las nociones que han aparecido han aportado, en verdad, solución a los problemas que efectivamente se planteaban.

Creo que es posible, tras la contingencia pintoresca que encadena teorías, dedicarse a este trabajo. Por mi parte, lo he intentado para la teoría de conjuntos; no pretendo haber tenido éxito, sino que justamente, en el desarrollo de esta teoría que parece ser el ejemplo mismo de una teoría genial, hecha a golpes de invenciones radicalmente imprevisibles, me parece percibir una necesidad interna: son ciertos problemas de análisis los que han dado nacimiento a nociones esenciales y han engendrado ciertos productos, adivinados por Bolzano o por Lejeune-Dirichlet y que se han transformado en procedimientos fundamentales al ser afinados por Cantor. Autonomía, de donde, necesidad.

2. Este devenir se desarrolla como un devenir verdadero, es decir, es imprevisible. Puede que no lo sea para las intuiciones del

matemático en plena actividad que adivina de qué lado hay que buscar pero es imprevisible originariamente, de manera auténtica. Es lo que podríamos llamar la Dialéctica fundamental de las Matemáticas: si las nuevas nociones aparecen como necesitadas por los problemas planteados, esta novedad misma es, verdaderamente, una novedad completa. Es decir, no se puede, por un simple análisis de las nociones ya empleadas, encontrar, en su interior, las nuevas nociones: las generalizaciones, por ejemplo, que han engendrado los nuevos procedimientos.

Esta novedad será caracterizada en el segundo punto de mi conclusión: a saber, que la actividad de los matemáticos es una actividad experimental.

Por experiencia entiendo un sistema de gestos regidos por una regla y sometidos a condiciones independientes de esos gestos. Reconozco la vaguedad de tal definición y creo que es imposible paliarla sin tomar ejemplos efectivos; quiero decir, con ello, que cada procedimiento matemático se define en relación a una situación matemática anterior, de la que depende parcialmente y en relación con la cual tiene, también, una independencia tal que el resultado de este gesto debe ser considerado cuando se lleva a cabo. Es por aquí, creo yo, que se puede definir la experiencia matemática.

Esta experiencia, ¿tiene algo que ver con lo que llamamos así habitualmente? Creo que es preeferible reservarle la palabra misma de experiencia; en particular, la experiencia física me parece un complejo de muchos elementos heterogéneos sobre los que no voy a insistir hoy —ello nos llevaría demasiado lejos— pero que, en particular, no posee el carácter de que los gestos se lleven a cabo conforme a una regla ni que, por otra parte, el resultado tenga una significación en el sistema mismo, lo que es el caso de la experiencia matemática. Es decir, dada la situación matemática, el gesto completado nos da un resultado que, por el hecho mismo de aparecer, encuentra su lugar en un sistema matemático que prolonga al sistema anterior (y lo contiene como un caso particular).

¿Cómo se pueden llevar a cabo estas experiencias? He intentado decirlo desde mi libro sobre el método axiomático, de manera incompleta pero espero precisarlo más adelante; he indicado algunos de los procedimientos empleados por los matemáticos. Es, por supuesto, una descripción esquemática, pues, en cada instante, hay ciertos procedimientos que se sitúan en una atmósfera matemática, en un estado de las Matemáticas que en un momento da-

do puede no ser transportable. He indicado, sin embargo, algunos de estos procedimientos, inspirándome, por otra parte en los análisis de Hilbert y en el de Dedekind en su discurso ante Gauss en 1857, que fue aprobado por Gauss y publicado recientemente por Noether en 1931.

He llamado a un primer procedimiento, en general, tematización, es decir, aquel en el que los gestos efectuados sobre un modelo o un campo de individuos pueden, a su vez, ser considerados como individuos sobre los que el matemático trabajaría considerandolos como un nuevo campo. Por ejemplo, la topología de las transformaciones topológicas; y se podrían encontrar otros ejemplos. Este procedimiento permite la superposición de reflexiones matemáticas y tiene, también, el interés de mostrarnos que el vínculo entre la actividad concreta del matemático desde los primeros momentos de su desarrollo —colocar dos objetos simétricos uno al lado de otro, hacerlos cambiar de lugar— y las operaciones más abstractas, no cesa, pues cada vez que el vínculo se encuentra en el hecho de que el sistema de objetos considerado es un sistema de operaciones que, en sí mismas, son operaciones sobre otras operaciones que, finalmente, se reencuentran sobre objetos concretos.

Segundo procedimiento, llamado por Hilbert idealización o adjunción de elementos ideales; consiste simplemente en exigir que una operación, que se encontraba accidentalmente limitada a ciertas circunstancias extrínsecas al cumplimiento de la operación misma, se libere de esta limitación extrínseca y ello por la posición de un sistema de objetos que ya no coincide con los objetos de la intuición. Es así, por ejemplo, que se hacen las diferentes generalizaciones de la noción de número.

¿Cuál será la conclusión para la noción misma de objeto matemático? He intentado indicarlo, de manera posiblemente poco satisfactoria, lo reconozco, no me satisface, pero es una aproximación.

El objeto matemático se encuentra, así, a mi juicio, siempre correlativo a los gestos efectivamente llevados a cabo por el matemático en una situación dada. ¿Esto quiere decir que el objeto posee un modo de existencia particular? ¿Habría, por ejemplo, objetos ideales existentes en sí? En las discusiones propiamente matemáticas que han tenido lugar entre la escuela de Viena y la escuela de Hilbert se plantea la cuestión de saber si hay —a esto se le llamaba platonismo, creo que la expresión no corresponde

muy bien a la cosa pero la palabra importa poco— una región de objetos ideales a los que pudieran hacer referencia las Matemáticas es a lo que Gentzen llama, en un artículo aparecido este verano, matemática en sí.

Creo poder, desde este punto de vista, ir más lejos que Gentzen que intenta llevar a cabo una reconciliación entre la matemática en sí y la exigencia construccionista del intuicionismo; creo que concebir sistemas de objetos matemáticos existentes en sí no es en modo alguno necesaria para garantizar el razonamiento matemático: por ejemplo, cuando se trata del continuo, esa concepción de los objetos matemáticos debe ser rechazada por una razón asaz simple: es totalmente inútil, tanto para el desarrollo de las matemáticas como para una comprensión de ese desarrollo.

En efecto, si responde a algo preciso, ello querría decir que, si esos objetos a que la matemática se refiere no son aprehensibles en una intuición cualquiera, o por lo menos sus propiedades, su presencia simultánea es exigida en un momento dado del razonamiento del matemático. No sólo esto no sucede sino, más aún, si se quiere precisar lo que quiere decir nos enfrentamos a dificultades que nos obligan a rechazar toda la concepción; aquí, hago referencia a la paradoja de Skolem.

No quiero desarrollar esta paradoja, ni quiero explicitarla con precisión; se requeriría una formalización. Brevemente, significa lo siguiente: si tenemos un modelo, que suponemos satisface un sistema de axiomas, es siempre posible construir un modelo numerable que satisfaga al mismo sistema de axiomas. En particular, se pueden satisfacer los axiomas de la teoría de conjuntos con un modelo numerable.

Esta paradoja, sobre la que Skolem mismo y otros —y este verano Gentzen— han reflexionado largamente, se reduce a lo siguiente: que una caracterización exhaustiva de un modelo que satisfaga un sistema de axiomas, es imposible. Si suponemos que los axiomas están dados, es decir que las propiedades de que tenemos necesidad para los objetos están enumeradas, no podemos exigir que estos axiomas, al mismo tiempo engendren objetos y nos vemos obligados a suponer un campo de objetos y, entonces, de las propiedades de estos objetos en este campo podemos deducir otras propiedades. Lo que no podemos decir es que nuestro campo de objetos pueda ser caracterizado de una manera unívoca por el sistema de axiomas.

Esto tiene el interés, no sólo de eliminar esta concepción, por

así llamarla, idealista acerca de la existencia de los objetos matemáticos sino también de marcar la íntima solidaridad que liga a los momentos del desarrollo matemático.

No se parte de cero. Se puede, históricamente, ver aparecer a las matemáticas en el grupo de desplazamientos de la geometría elemental, pero si queremos precisar lo que entendemos con ello —sea por medio de la actividad de enumeración que está implicada en lo que Poincaré llamaba la intuición del número puro, sea por el comienzo de la geometría elemental—, estamos obligados, realmente, a desarrollar todas las matemáticas; podemos detenernos arbitrariamente y decir: este estado nos satisface pero, si somos fieles a la exigencia misma que preside el nacimiento de estas nociones y su desarrollo, será necesario que superemos los problemas que surgen, por ejemplo, de la negativa a detenernos en circunstancias que son exteriores al problema planteado y, en este momento, aparecen nuevas nociones y se engendran, no solamente las matemáticas hasta nuestros días sino las exigencias de desarrollo y los problemas no resueltos que provocan las transformaciones actuales.

En conclusión, yo diría, por lo tanto, que la noción misma de existencia de los objetos matemáticos es la que nos interesa, a los filósofos, porque plantea el problema mismo de la existencia de los objetos del pensamiento.

¿Qué quiere decir, para un objeto, existir? Aquí nos encontramos ante el hecho mismo de que el tipo de conocimiento cierto y riguroso, que es justamente el conocimiento matemático, nos impide poner a los objetos mismos como existentes de manera independiente del sistema completo acerca de esos objetos e incluso, independientemente de un encadenamiento necesario a partir del principio mismo de la actividad humana.

De manera que no podemos jamás, ni proponerlos en sí ni decir exactamente: he aquí el mundo —un mundo que describiremos. Cada vez nos veremos obligados a decir: estos son los correlatos de una actividad. Todo lo que pensemos de ellos son reglas del razonamiento matemático exigidas por los problemas que se plantean y hay, incluso, un desbordamiento, una exigencia de superación en los problemas no resueltos que nos obliga a pensar nuevamente en otros objetos y a transformar la definicíon de los objetos primitivos.

Tales son las reflexiones que quería presentar: no oculto su carácter incompleto, insuficiente, que estalla, incluso, ante mis ojos;

pero creo que el estado de las matemáticas actualmente necesita, por lo menos, lo esencial.

Comunicacion de Lautman

Tras escuchar a Cavaillès, estoy más convencido de que no estoy de acuerdo con él y voy a esforzarme, durante los breves instantes en que tendré la palabra, por precisar los puntos en los que nuestras concepciones divergen. Cavaillès, me parece, en lo que llama experiencia matemática, atribuye un papel considerable a una actividad del espíritu que determina, en el tiempo, al objeto de su experiencia. No existirían, por tanto, según él, caracteres generales constitutivos de la realidad matemática; ésta se afirmaría, por el contrario, en cada momento de la historia de las matemáticas como un evento a la vez necesario y singular. De ahí las críticas de Cavaillès contra el platonismo en matemáticas, en tanto que el platonismo se identificaría con una teoría de la existencia "en sí" de las matemáticas.

Reconozco, con Cavaillès, la imposibilidad de una concepción tal de un universo inmutable de seres matemáticos ideales. Es una visión extremadamente seductora pero de una consistencia verdaderamente demasiado débil. Las propiedades de un ser matemático dependen esencialmente de los axiomas de la teoría en que estos seres aparecen y esta dependencia los despoja de la inmutabilidad que debiera caracterizar un universo inteligible . Yo no considero tampoco, que los números y las figuras posean una objetividad tan cierta como aquella ante la que el espíritu tropieza cuando observa la naturaleza física; pero esta objetividad de los seres matemáticos, que se manifiesta de manera sensible en la complejidad de su naturaleza, no revela su verdadero ser sino en una teoría de la participacíon de las matemáticas en una realidad más alta y oculta que constituye, según yo, un verdadero mundo de las ideas.

Para haceros comprender como el estudio del desarrollo reciente de las matemáticas puede justificar la interpretación platónica que he propuesto, es necesario que insista, ante todo, sobre eso que se ha llamado el aspecto estructural de las matemáticas contemporáneas. Se trata de las estructuras matemáticas pero veremos como, en seguida, es fácil remontarnos desde estas estructuras matemáticas a la consideración de estructuras dialécticas encarnadas en las teorías matemáticas efectivas.

El aspecto estructural de las matemáticas contemporáneas se manifiesta en la importancia del papel que juegan, en todas las ramas de las matemáticas, la teoría de conjuntos debida a Cantor, la teoría de Galois y la teoría de campos de números algebráicos de Dedekind. Lo que caracteriza estas diferentes teorías es que se trata de teorías abstractas; que estudian los posibles modos de organización de elementos cuya naturaleza es indiferente. Así, por ejemplo, es posible definir propiedades globales de orden, de completez, de división en clases, de irreductibilidad, de dimensión, de cerradura, etc. que caracterizan de manera cualitativa las colecciones a las que se aplican. Un nuevo espíritu anima a las matemáticas; los largos cálculos ceden su lugar a los razonamientos más intuitivos de la topología y el álgebra. Consideremos, por ejemplo, lo que los matemáticos llaman teoremas de existencia; es decir, teoremas que establecen, sin construir, la existencia de ciertas funciones o soluciones. En un gran número de casos, la existencia de la función que se busca puede deducirse de propiedades topológicas globales de una superficie convenientemente definida. Así, en particular, se ha desarrollado, desde Riemann, la teoría geométrica de funciones analíticas que permite deducir la existencia de nuevos seres trascendentes a partir de la consideración, casi intuitiva, de la estructura topológica de ciertas *superficies de Riemann*. En este caso,el conocimiento de la estructura matemática de la superficie se prolonga en la afirmación de existencia relativa de la función buscada.

Si se reflexiona sobre el mecanismo interno de la teoría a la que acabamos de aludir, nos damos cuenta de que establece los vínculos entre el grado de estructuración interna de un cierto ser matemático (una superficie) y la existencia de otro ser matemático (una función). Es decir, en suma, entre la *esencia* de un ser y la *existencia* de otro. Estas nociones de *esencia* y *existencia* como las de *forma* y *materia*, de *todo* y de *parte*, de *contenido* y de *forma*, etc. no son nociones matemáticas y, sin embargo, es hacia ellas que nos conduce la consideración de las teorías matemáticas efectivas. Les llamo *nociones* dialécticas y propongo llamar *idea* dialéctica al problema de la posible vinculación entre nociones dialécticas así definidas. La razón de las relaciones entre dialéctica y matemáticas reside, ahora, en el hecho de que los problemas de la dialéctica son concebibles y se pueden formular independientemente de las matemáticas pero todo esbozo de solución que se aporte a estos problemas se apoya necesariamente sobre algún ejemplo mate-

mático destinado a apoyar de manera concreta la liga dialéctica que se estudia.

Consideremos, para ello, por ejemplo, el problema de las relaciones entre la forma y la materia. Es posible preguntarse en qué medida una forma determina la existencia y las propiedades de la materia a la que es susceptible de aplicarse. He ahí un problema filosófico capital para toda teoría de las ideas pues no basta plantear la dualidad de lo sensible y de lo inteligible; es necesario explicar, además, la participación, es decir, la deducción, la composición o como quiera llamarse a la génesis de lo sensible a partir de lo inteligible. Ahora bien, las matemáticas proveen justamente, en ciertos casos, ejemplos notables de determinación de la materia a partir de la forma: toda la teoría de la representación de grupos abstractos tiene por meta determinar *a priori* el número de transformaciones concretas susceptibles de realizar, de manera efectiva, un grupo abstracto de estructura dada. En el mismo sentido, la lógica matemática contemporánea muestra la vinculación estrecha que existe entre las propiedades intrínsecas de una axiomática formal y la extensión de los campos de individuos en que esta axiomática se realiza. Tenemos ante nosotros el espectáculo de dos teorías tan distintas una de la otra, la teoría de la representación de grupos y la lógica matemática que presentan, empero, entre sí, estrechas analogías en su estructura dialéctica; ello les viene de ser, una y otra, soluciones particulares de un mismo problema dialéctico, el de la determinación de la materia a partir de la forma.

Ya indiqué que la distinción entre una dialéctica ideal y una matemática efectiva debe ser, sobre todo, interpretada desde el punto de vista de la génesis de las matemáticas a partir de la dialéctica. He aquí lo que entiendo: la dialéctica, en sí misma, es problemática pura, antitética fundamental relativa a las parejas de nociones que parecen, a primera vista, oponerse y a propósito de las que se plantea, sin embargo, el problema de una síntesis o de una posible conciliación. Es así, por ejemplo, que he tratado en mi tesis, el problema de las relaciones de lo local y lo global, de lo extrínseco y de lo intrínseco, de lo continuo y lo discontinuo, etc. Encontramos, entonces, exactamente como en el *Sofista* de Platón, que los contrarios no se oponen sino que son susceptibles de componerse entre ellos para constituir los mixtos que constituyen las matemáticas. De ahí la necesidad de estas sutilezas tan complicadas, y de este pintoresco imprevisible, de estos obstáculos que a ve-

ces se superan y otras se rodean, de todo este devenir histórico y contingente que constituye la vida de las matemáticas y que se presenta, sin embargo, al metafísico como el prolongamiento necesario de una dialéctica inicial. Se pasa, de manera insensible, de la comprensión de un problema dialéctico a la génesis de un universo de nociones matemáticas y es en el reconocimiento de este momento que la idea hace nacer lo real, que segun yo, es a lo que debe apuntar la filosofía matemática. He intentado mostrar, en un fascículo que apareció en la Librería Hermann después de mi tesis, mostrar la analogía entre estos conceptos y los de Heidegger. La prolongación de la dialéctica en matemáticas corresponde, me parece, a lo que Heidegger llama la génesis de la realidad óntica a partir del análisis ontológico de la idea. Se introduce, así, al nivel de las ideas, un orden de la anterior y lo posterior que no es el tiempo sino, más bien, un modelo eterno del tiempo, el esquema de una génesis constantemente haciéndose, un orden necesario de la creación.

Me parece que el problema de las relaciones entre la teoría de las ideas y la física podría ser tratado de la misma manera. Consideremos, por ejemplo, el problema de la *coexistencia* de dos o más cuerpos; se trata de un problema puramente filosófico del que diríamos que Kant lo ha planteado más que resuelto en la tercera categoría de la relación. Empero, nos encontramos con que, desde que el espíritu intenta pensar lo que podría ser la coexistencia de varios cuerpos en el espacio, se compromete necesariamente en las dificultades todavía no superadas del problema de los n cuerpos. Consideremos también el problema de las relaciones entre el *movimiento* y el *reposo*. Se puede plantear abstractamente el problema de saber si la noción de movimiento no tiene sentido excepto en relación al reposo absoluto o si, por el contrario, no hay reposo excepto en relación a ciertos cambios; todo esfuerzo por resolver estas dificultades da lugar a las sutilezas de la teoría de la relatividad restringida. Del mismo modo, podemos preguntarnos a cuál de las nociones de movimiento o de reposo habría que dar sentido físico y, en este punto, se contraponen la mecánica clásica y la mecánica ondulatoria. Aquélla contempla a la onda como un movimiento físico real; para ésta, por el contrario, la ecuación de onda aparece como un artificio destinado a dejar clara la invariancia física de ciertas expresiones en relación a ciertas transformaciones. Parecería que, entonces, las teorías de Hamilton, Einstein y Louis de Broglie adquieren todo su sentido por referencia a nociones de

movimiento y de reposo de las que constituyen la verdadera dialéctica. También es posible que lo que los físicos llaman crisis de la física contemporánea, a costa de las dificultades de las relaciones entre continuo y discontinuo, no sea una crisis excepto en relación a una cierta concepción demasiado estéril de la vida del espíritu en la que lo racional se identifica con la unidad. Parece, por el contrario, más fecundo preguntarse si la razón en las ciencias no tiene por objeto ver, en la complejidad de lo real, tanto en matemáticas como en física, un mixto cuya naturaleza no puede explicarse sino remontándonos a las ideas en las que este real participa.

Se ve, así, cuál debe ser la tarea de la filosofía matemática e incluso, de la filosofía de las ciencias en general. Se trata de edificar la teoría de las ideas y ello exige tres tipos de investigación: las que surgen de lo que Husserl llamaba eidética descriptiva, es decir, la descripción de esas estructuras ideales, encarnadas en las matemáticas y cuya riqueza es inagotable. El espectáculo de cada una de estas estructuras es, cada vez, más que un ejemplo nuevo que se aporta para apoyar una misma tesis pues no está excluído que sea posible —y esta es la segunda tarea asignable a la filosofía matemática— establecer una jerarquía de las ideas y una teoría de la génesis de unas a partir de otras, como lo había previsto Platón. Queda, en fin, la tercera de las tareas anunciadas,rehacer el *Timeo*, es decir, mostrar, en el seno de las ideas mismas, las razones de su aplicación al universo sensible.

Tales me parecen ser los propósitos principales de la filosofía matemática.

Sesión del 4 de febrero de 1939
Sociedad Francesa de Filosofía

Matemáticas y formalismo

Jean Cavaillès

Desde 1825, Gergonne distinguía entre matemática concreta y teoría formal de operaciones acerca de objetos arbitrarios. Pero la evolución durante el siglo XIX tendía a suprimir la primera en favor de la segunda. Intersecciones inesperadas y la aparición de nuevas vías mostraron, por las comparaciones que se provocaron, cuán multívoco era recurrir a la evidencia y, por otra parte, el peligro de trasponer, sin crítica, métodos intuitivos, buenos para un dominio especial (diferencia de tratamiento entre las sumas finitas e infinitas; carácter no conmutativo de la multiplicación para ciertos números complejos). De ahí la necesidad de unificar, generalizando y no asimilando; de precisar en lo sensible en lugar de imaginar: sistematización y simbolismo, los dos remedios habituales para las matemáticas a partir del momento en que aparecen dificultades y por medio de las que se fundan las teorías nuevas. Recurrir a ello para el edificio entero, transformado en sistema de símbolos no era, por otra parte, nuevo: es el viejo sueño del panlogismo.

Implica, en efecto, integrar la lógica al formalismo. La interrupción de los encadenamientos simbólicos por razonamientos claros haría inútil todo el esfuerzo previo: en una palabra, un salto intuitivo del pensamiento y se reintroducen las vinculaciones sensibles y las nociones de validez limitada. Si las matemáticas son, como decían Frege y Dedekind, una parte de la lógica, ésta no debe ser, a su vez, sino un juego mecánico de símbolos: proposiciones y razonamientos son llevados a materializaciones definidas de manera precisa. Se propondrán, originalmente, ciertos signos, en número restringido y fácilmente reconocibles: paréntesis, letras, etc.; algunas reglas de empleo les darán sentido: la reunión de ciertos signos en un orden conforme a dichas reglas constituirá una fórmula. En fin, ciertas fórmulas — o ciertos esquemas, es decir, fórmula en que se dejan blancos que pueden ser llenados con

Mathesis, 5 (1989) 579-584

categorías determinadas de signos — se proponen como válidas primitivamente: éstas serán los axiomas. Las reglas permitirán su combinación o su transformación para obtener nuevas fórmulas válidas: por ejemplo, la regla de sustitución que permite reemplazar en el axioma ciertos signos por otros; la regla de implicación gracias a la cual dadas dos fórmulas, una de las que se propone como válida. Si la otra, escrita tras la primera y tras el signo = (traducción de la antigua implicación) constituye una fórmula válida, se tiene el derecho a proponer como válida a la segunda. Reglas de empleo de símbolos, axiomas y reglas de transformación de fórmulas que no son, evidentemente, arbitrarias sino que se eligen de manera que permitan traducir los razonamientos intuitivos más habituales: esto es la lógica general. La constitución de una teoría particular se manifiesta por la introducción de nuevos símbolos que definen nuevos axiomas, complementados, a veces, con reglas nuevas (como la de inducción completa en la aritmética). Pero las reglas y axiomas primitivos son propuestos implícitamente al principio del desarrollo de una teoría; se ve, asimismo, el modo de subordinar una teoría a otra.

Toda demostración es un diseño, fórmulas escritas, unas abajo de otras, cada línea según las reglas de constitución de fórmulas, cada tránsito de una línea a otra conforme a las reglas de transformación. A la cabeza y, de tiempo en tiempo, lineas sin justificación: axiomas. Se ve el trabajo matemático reducido a la puesta en marcha de un inmenso mecanismo: lo imprevisto no puede surgir sino de axiomas nuevos. Propuestos éstos, —o reglas aferentes— un espíritu suficientemente poderoso podrá percibir todos los teoremas que son demostrables. La matemática es una combinatoria.

Se plantean, empero, dos cuestiones: ¿es posible engendrar de esta manera todos los objetos —o sistemas de objetos— a que se adhieren de hecho los razonamientos en la matemática histórica? Por otra parte, ¿se tiene la certeza de no obtener, con suficientes axiomas, las fórmulas rechazadas por aquélla? Nuestro formalismo universal, ¿es toda la matemática y nada más que la matemática? No se trata de una fidelidad de traducción: hay una sustitución y el formalismo quiere rebasar lo que reemplaza. Incluso es necesario que demostrar tenga sentido, es decir, que no toda fórmula sea demostrable. El primer problema es el de la perfección del formalismo; el segundo el de la no contradicción. Para una teoría particular, se conoce un método que resuelve el segundo problema: la aritmetización. Se representa cada símbolo por una

cifra, se traduce cada axioma en una proposición aritmética verdadera: la teoría se transforma en una parte de la aritmética: si ésta no es contradictoria, aquella tampoco. Es un hecho que la traducción siempre es posible: incluso la lógica se deja tratar así. Pero esta feliz particularidad, ¿no es un indicio inquietante? Puesto que (la lógica) se deja representar por nuestro formalismo universal, ¿no es, en realidad, una parte de la aritmética?

Nos vemos llevados, así, al primer problema y, como precisa Skolem, a su solución negativa. Supongamos a todas las matemáticas actuales insertas en nuestro formalismo: será posible escribir todos los axiomas, uno a continuación de otro, o por lo menos, si tenemos esquemas, arreglarlos en una serie infinita numerable, es decir, numerada con la ayuda de los números enteros. Se puede, por ejemplo, escribir primero los que incluyen dos símbolos, luego los de tres, etc. Para cada número dado de signos no hay sino un número finito de axiomas (o una infinidad numerable si admitimos la posibilidad de sustitución en los blancos). Por lo tanto, la totalidad de los axiomas será, a lo más, un infinito numerable. Pero nuestros axiomas definen de manera exhaustiva los objetos matemáticos, es decir, estos no son otra cosa que el sistema de elementos arbitrarios que satisfacen a aquellos. Ahora bien, se ve, por la ordenación precedente, que es posible satisfacer los axiomas con un sistema infinito numerable de objetos: basta dar un nombre —un número de un orden particular— a cada uno de los signos que intervienen en un axioma. Como en cada axioma no interviene sino un número finito, jamás rebasaremos el infinito numerable. Es sin embargo, una verdad bien conocida que hay, por ejemplo, una infinidad no numerable de puntos sobre una recta o de decimales entre 0 y 1. Esto se ve por medio del procedimiento clásico de la diagonal: si se pueden arreglar todos los número decimales, unos bajo los otros, el procedimiento permite definir un número decimal que no pertenece al sistema, por ejemplo, el número cuya primera cifra corresponde a la primera cifra del primer número aumentada en 1, la segunda a la segunda del segundo más 1, etc.: cualquiera que sea el rango considerado, una coincidencia completa es imposible. Por lo tanto, las matemáticas en acto nos obligan a romper lo numerable, no se pueden someter a un formalismo universal. Sin duda se podrá responder que una parte (de las matemáticas) está siempre abierta, que nada impide aumentar nuevos axiomas que permitirán esperar nuevos objetos; por otra parte, el conjunto de objetos matemáticos efec-

tivamente construídos no puede rebasar, incluso, lo finito. No hay, por ejemplo, sino un número finito de números trascendentes conocidos. Pero, ¿será necesario rechazar todos los razonamientos que toman como punto de partida el conjunto de todos los números trascendentes —todos los números reales? Ello sería una amputación en la que sueñan algunos matemáticos en momentos de depresión filosófica. Frente a la exigencia concreta de un problema, solamente cuentan la fecundidad y la armonía de los métodos. En cuanto a la noción de formalismo abierto, parece ser muy decepcionante. ¿Para qué sirve un formalismo si, frente a una cuestión nueva, no nos provee automáticamente, por lo menos, de un medio para buscar la respuesta? Incluso la garantía de no contradicción —que hiciere surgir la investigación— no puede ser dada por él.

No se puede demostrar, en un formalismo integral, la no contradicción de la aritmética: éste es el resultado obtenido por Gödel mediante un razonamiento parecido al de Skolem. Puesto que tenemos un número finito de símbolos y axiomas, siempre será posible numerar objetos y proposiciones aritméticas demostrables formalmente. El procedimiento de la diagonal —complicado— nos da el número de una proposición tal que su demostración o su refutación (es decir, la demostración de su negación) formales engendrarían, de la misma manera, una contradicción en la teoría. Esto se puede poner en forma. Si hubiera una demostración formal de la no contradicción de la teoría, añadiéndole el razonamiento anterior, se obtendría una demostración formal tanto de la proposición como de su negación: la teoría sería contradictoria. Se trata, modernizada, de la paradoja del mentiroso. Rebasa la aritmética y vale para todo formalismo absoluto —es decir, aquél en donde todo está definido por medio de un sistema delimitado de convenciones: si la teoría no es contradictoria, puede demostrar, ella misma, su no contradicción. Se puede, sin duda, apelar al recurso de las teorías más generales; fundar, por ejemplo, la aritmética sobre el análisis. Pero esto no tiene interés para el problema del formalismo: ¡qué significación, otra que imaginativa, puede poseer esta superposición indefinida de teorías cada vez más vastas cada una de las cuales no existe sino en tanto formal sino gracias a aquella que la domina!

Así, el simbolismo conquistador del siglo XIX desemboca en un doble fracaso. Hilbert, quien más ha hecho por su triunfo, jamás pretendió que fuera completo. Manejaba, más allá del juego me-

cánico de los signos, una "región irreductible del pensamiento concreto". Esta zona es más vasta de lo que él pensaba. En particular, el famoso problema de la "decisión" —que, resuelto, habría dado un procedimiento para reconocer si una fórmula dada es demostrable o no en una teoría— no parece examinable fructíferamente más que en casos muy especiales. Por otra parte, desde el momento en que que intervienen superposiciones complicadas de formalismos cuya coordinación en un sistema único no se realiza nunca y en donde se hace referencia a colecciones infinitas no numerables, no es posible darle un sentido. El matemático considera un pequeño diseño de objetos, provisto cada uno de un cierto número de grados de libertad —que, por apretados que sean, no fijan sino cotas a la infinidad de posibilidades de movimiento. Con un gesto —como un salto tras la liebre ("comme un saut après l'aguet")— cerrará la figura que había permanecido inacabada en el problema. Esto no es psicología: se puede retraducir lo que se ha hecho, tras hacerlo, a encadenamientos de lógica tradicional. Pero esto no es más que traducción: no hay primacía para un modo de vinculación, por otra parte tan espacial como los otros. Grassmann se quejaba de que se despojara a los razonamientos geométricos de su originalidad: la transposición analítica siempre es posible, frecuentemente artificial. Lo mismo en otros sitios: cada parte independiente de las matemáticas posee sus modos propios de encadenamiento, que la caracterizan. Se puede hacer un censo de los que existen y alinearlos, incluso, en una jerarquía. Será vano creer que una combinatoria cualquiera pueda dar cuenta de ellos. No hay, además, una combinatoria infinita —y si se quieren reducir estos gestos a elementos unitarios, hay que recurrir al infinito.

La axiomatización y la crisis del formalismo, no han sido trabajos inútiles. Han obligado al rigor, a la pureza de los pensamientos por eliminación de lo adventicio; han hecho aparecer parentescos imprevistos entre disciplinas diferentes. Pero no valen más que limitadamente. Grandes hiatos subsisten. Lusin se preocupaba por poder definir geométricamente, con facilidad, conjuntos totalmente fuera del alcance del análisis. Esta era, un poco, la situación de Pitágoras ante su diagonal: veinticinco siglos después, hemos sido reafirmados por un axioma que hace, por otro lado, un llamado a la intuición. No pocos escalones faltan en este edificio en devenir: con un poco de agilidad, se puede saltar de un punto a otro. Es también satisfactorio para algunos pretender que existe

un plan total en donde todo está ligado: pero no es más que un en sí, requisito, posiblemente, del pensamiento coherente. En todo caso, inaccesible. Las dificultades se eliminan de la siguiente manera: el modo de ser de las intuiciones abstractas, la plasticidad de la materia permite las traducciones de una teoría a otra; sobretodo, el entrecruzamiento de los métodos, los "momentos solemnes" que regocijan a Brunschvicg y sus discípulos, tantos problemas que la reflexión filosófica no sabe resolver. La imagen de un gesto no debe engañarnos: por gratuita que parezca la invención de un método, el desarrollo de la matemática entera se sigue según un ritmo necesario: hay un condicionamiento recíproco de las nociones y de las ampliaciones que provoca su aplicación obligatoria en dominios vecinos. Precisar las modalidades examinando de cerca esta historia que no es una historia, puede ayudar a comprender, pero en ningún caso a definir si por definición entendemos reducción. El fracaso de la tentativa simplista en que toda la matemática sería llevada a la más pobre de sus ramas, el cálculo combinatorio, es un ejemplo suficiente. Inútil ensayar planes más ambiciosos, como quería Cantor con su teoría de conjuntos. La actividad matemática es objeto de análisis y posee una esencia: pero, como un olor o como un sonido, es en sí misma.

Autores

Jean Cavaillès nació en 1903 en el seno de una familia militantemente protestante y heredera de una vieja tradición de combate. En 1920, estudia en el Liceo Louis-Le-Grand de París y, en 1923, es admitido —como Couturat antes y como Herbrand después— en primer lugar a la Escuela Normal Superior.

En 1929, escucha a Husserl quien habría de dejar su huella en la obra de Cavaillès. En 1930, recibe una beca de la Fundación Rockefeller para realizar una investigación sobre movimientos juveniles en Alemania. Vive en Alemania un largo período durante el cual no sólo termina su trabajo "sociológico" sino que, en colaboración con Emmy Noether, publica la correspondencia entre Cantor y Dedekind.

En 1937 obtiene el doctorado con una tesis principal sobre el método axiomático y una tesis secundaria sobre la teoría de conjuntos (respectivamente, *Méthode axiomatique et formalisme* y *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*).

En 1941 es nombrado profesor en la Universidad de Estrasburgo. Al estallar la guerra, se incorpora al ejército francés y es tomado prisionero por primera vez. Logra escapar y se incorpora al movimiento de Resistencia. Organiza inicialmente una red de información y, más adelante, en compañía de Canguilhem, un grupo de "acción directa". Es hecho prisionero por segunda vez y, en prisión, escribe *Sur la logique et la théorie de la science* que habría de ser publicado, fragmentariamente, de manera póstuma. Por segunda vez logra escapar y se incorpora de lleno en el movimiento clandestino. En 1943 es arrestado por tercera vez y, rumbo a la deportación, es fusilado, por la Gestapo, en Arras. Su cuerpo es abandonado al borde del camino y enterrado en la fosa común con la mención "desconocido número 5".

Su obra consta de dos tipos de trabajos. Una primera serie teológico-sociológica y otra estrictamente matemática. La primera consta de una serie de artículos sobre la situación política de la Iglesia en la Alemania nazi y la segunda se centra en la polémica, candente en aquellos años, acerca de los fundamentos de las ma-

temáticas. Con Bachelard y Canguilhem se le considera uno de los pilares, a pesar de la dificultad que entraña la lectura de sus trabajos, de la escuela epistemológica francesa.

Fue condiscípulo de Lautman (q.v.) y participó críticamente, según el testimonio de H. Cartan, en las empresa bourbakiana. Los trabajos que aquí presentamos fueron, en ambos casos, publicados póstumamente. Se trata de la primera traducción que jamás se haya hecho de ellos.

Louis Couturat nació en París el 17 de enero de 1868 y murió el 3 de agosto de 1914, a los 46 años, en un accidente de carretera.

Fue estudiante del Liceo Condorcet y en 1887 ingresó a la Escuela Normal Superior. En 1890 obtuvo el primer lugar en la agregación en filosofía.

En 1892 inicio sus estudios en matemáticas en la Facultad de Ciencias en donde fue alumno de Picard y de Jordan y, nuevamente, obtuvo el primer lugar en la agregación, esta vez, en matemáticas.

Inicia su tesis consagrada al infinito matemático bajo los auspicios de Poincaré al tiempo que trabaja en su tesis "latina" sobre Platón. Sostuvo ambas en 1896.

En 1897, da cuenta del formulario de Peano en el *Bulletin des sciences mathématiques* mostrando la filiación leibniziana del proyecto de Peano. Según Couturat, se trata de un paso fundamental en el proceso de constitución de la *caracteristica universalis* soñada por Leibniz.

En 1900-1901, radica en Hannover en donde estudia los manuscritos de Leibniz. Como resultado, publica *La logique de Leibniz* y edita *Opuscules et fragments inédits*.

En 1905, fue nombrado al Colegio de Francia, en su exposición inaugural criticó el sociologismo de Comte. En este año, también, publica su *Algèbre de la logique* al que Tarski se refiere explícitamente en su tesis doctoral.

Desde 1893, Couturat colaboraba con la *Revue de Métaphysique et de Morale*. En el primer número de la revista escribió un artículo sobnre las geometrías no-euclideanas y, más tarde, inicia, en la misma revista, una polémica histórica con Poincaré. Esta polémica culminaría en 1904, año del centenario de Kant y año mismo en que Borel, Baire y Lebesgue introducían las teorías cantoria-

nas en Francia y en que se publicaba el teorema de Zermelo. La intervención de Couturat, tanto en la necesaria revisión del análisis clásico como en los modos de lectura de Kant, fue decisiva. Basta recordar que tanto Hilbert como Poincaré, en su momento, se declararon kantianos. Véase Mathesis, no.1 vol. 1, p. 79.

Jacques Herbrand, nació en París el 12 de febrero de 1908; murió en La Bérarde (Isère) el 27 de julio de 1931.

Jacques Herbrand murió en un accidente de montañismo en La Bérarde el 27 de julio de 1931. Tenía solamente 23 años pero, como escribieran a su padre Helmut Hasse y Richard Courant, ya se le contaba entre los más grandes matemáticos de la joven generación. Era el único hijo de sus padres y estos reconocieron su genio precoz y se esforzaron por garantizarle su pleno desarrollo por medio de su apoyo y amor. Nunca pudo ser sino el primero en todo: en el Concours General, en el examen de la Ecole Normale Supérieure — cuando tenía 17 — y en la Agrégation en 1928. En 1930 recibió su doctorado con los más altos honores y ese mismo año recibió la beca Rockefeller para viajar a Alemania en donde sus estudios en Berlín y Hamburgo le hicieron ocupar una plaza en la lista de honor de la educación superior.

Su trabajo, en abstracción y rigor, era perfecto, sin embargo, para él, la vida de la creación matemática no era un vida espiritual que pudiese conducirse fuera de la vida concreta del hombre; era, más bien, la única expresión que podía dar al drama interior de su alma apasionada. Vivía constantemente absorto en el análisis de los conflictos y deberes que hacían surgir en él una ineluctable sensibilidad. Parecía que solamente los éxitos más brillantes valían la pena a cambio de una vida que transcurría en la soledad espiritual. Los mejores trabajos de música y poesía contenían, para él, pensamientos cercanos a los suyos; el trabajo incesante de su voluntad no era un asunto ajeno a su conciencia. Siempre le fue necesario unir los elementos de una idea o de una sensación en una construcción terminada para poder saborearlos por adelantado y ver como se plegaban a su voluntad. Así, su interés, a lo largo de toda su vida, por la lógica matemática habría nacido de su esperanza maravillosa de anticipar el futuro por medio de cálculos y combinaciones finitos.

Desde sus días en la Ecole, leía y asimilaba el material de los Principia Mathematica de Whitehead y Russell y pretendía intro-

ducir en Francia el estudio de la nueva lógica axiomática que se desarrollaba en Gottingen alrededor de Hilbert. Durante el año de su Aggrégation obtuvo resultados que constituirían su tesis: una nueva demostración, la más simple hasta entonces, de la consistencia de la aritmética y un nuevo criterio, muy general y completamente formal, para la verdad de las proposiciones. Estas investigaciones, por medio de las cuales fue bien conocido por los matemáticos del Collège de France y particularmente por Hadamard, fueron, inicialmente, mal recibidas en la Sorbona: a los ojos de los analistas franceses, parecían tener más interés filosófico que matemático y Herbrand tuvo dificultades para encontrar un jurado que las aprobase. Debía mucho, en este punto, a la confianza que le tenía Vessiot y encontró en el director de la Ecole, un director de tesis que lo colmó de recomendaciones tras un diálogo muy animado en el que se confrontaron diferentes visiones de las matemáticas. Frente a los "constructivistas", para quienes la verdad matemática yacía en la realidad de la construcción o del cálculo, Herbrand intentó mostrar la validez del formalismo y explicó cuál era el problema fundamental de éste: montar un cálculo de proposiciones tal que "verdadero" y "falso" pudiesen ser considerados como predicados. Algunos meses después, además, tuvo la satisfacción de aclarar la naturaleza y el significado de las "metamatemáticas" en un artículo publicado en la Revue de métaphysique et de morale.

De hecho, la filosofía le gustaba enormemente: primero la filosofía de las ciencias pero también, y de manera especial, la filosofía que tenía que ver los sentimientos y los deseos del alma. No buscaba en ella un sistema para el hombre. Los problemas prácticos no le interesaban, no hablaba de ellos y nunca los discutía. Estaba ocupado en la labor incesante de introspección y buscaba, con su actitud de tensión moral permanente el difícil rigor que era el deseo constante de su ser. Su pensamiento siempre retuvo el mismo ideal, ya fuera que recitara para sí la "prosa para des Esseintes" o que se consagrara al estudio de la aritmética o del álgebra moderna.

De hecho, fue a estas disciplinas —las más abstractas de las matemáticas— a las que se dedicó durante su año en Alemania. Se vinculó con un joven matemático alemán y produjo una serie de artículos, la mayor parte de los cuales no ha sido publicada, sobre la simplificación de la teoría de clases de campos y su aplicación al teorema de Fermat. Intentaba, por otro lado, apuntar de manera

más completa hacia varios análogos a la teoría de campos de funciones algebriacas y numéricas. También quería atacar el problema de la función inversa de una función integral y, en fin, continuaba sus estudios sobre las más recientes teorías de física matemática. Su conocimiento se extendía a todas las áreas de las matemáticas y se le consideraba, entre sus colegas, como quien podría juzgar de antemano los resultados que podrían esperarse de una nueva investigación.

Esta práctica, seguida siempre con pensamiento riguroso, habría dado al mundo científico, en opinión de casi todos, uno de sus más grandes espíritus. Pero, a veces, parecía que Herbrand arrastraba su conciencia a un mundo de esterilidad y vacío en el que caía ocasionalmente cuando llevaba a cabo el más profundo autoanálisis. Sufría los efectos de esa ley inflexible que lo limitaba sin respiro a esta abstracción en la que sentía que su ser desaparecía, como en la muerte. En la esperanza de una plena armonía interna, se construyó la meta de una vida heróica sobre la cual podría sostener el genio de su espíritu y era en la potente emoción de la alta montaña en donde más se acercaba a la plenitud de la alegría y del ardor de los que se creía, frecuentemente, privado para siempre. Murió en este ascenso, no perseguirá ya más las ideas que se había formado y las sensaciones que había experimentado. Pero sus amigos entendieron lo suficiente de la belleza sublime de estas ideas y sentimientos como para no ser, ya nunca, apartados de los senderos que esta alma amada les había mostrado.

Albert lautman La biografía de Lautman está, aún, por escribirse. Se trata de una de las más grandes e injustas omisiones de los historiadores. Lo poco que se sabe es lo que anota la hermana de Jean Cavaillès en la biografía de éste:

Albert Lautman, nacido en París el 8 de febrero de 1908, ingresó a la Escuela Normal Superior en 1926. Obtuvo su "agregación" en 1930 y su doctorado en letras en 1937 con una tesis sobre la noción de estructura y de existencia en matemáticas, fue fusilado por los alemanes en Souges (Gironda), el primero de agosto de 1944, a la edad de treinta y seis años, por sus actividades en la Resistencia. Dejó, tras de sí, además de sus tesis, artículos y comunicaciones en congresos de filosofía que dan la medida de su valor filosófico.

En este número, se publica una de tales comunicaciones así como el elogio póstumo a J. Herbrand.

Créditos

Louis Couturat. "Pour la logistique". *Revue de Métaphysique et de Morale* 14 (1906) 208-250. (Traducción Santiago Ramírez.)

Jacques Herbrand. "Les bases de la logique hilbertienne". *Revue de Métaphysique et de Morale* 37 (1930) 243-255. (Traducción Santiago Ramírez.)

Albert Lautman. "Mathématiques et réalité". *Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique*. Sorbonne, Paris. 1935. vol. II, pp. VI.24-VI.27. (Traducción Santiago Ramírez.)

Jean Cavaillès y Albert Lautman. "La pensée mathématique". *Bulletin de la Societé Française de Philosophie*, 40 (1946) 1-17. (Traducción Santiago Ramírez.)

Jean Cavaillès. "Mathématiques et formalisme". *Revue International de Philosophie*, 8 (1949) 159-165. (Traducción Santiago Ramírez.)

Claude Chevalley y Albert Lautman. "Notice biographique sur Jacques Herbrand". *Annuaire de l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'École Normal Supérieure*. 1931, pp. 66-68.

MATHESIS, vol. V, núm. 4, se terminó de imprimir el 24 de noviembre de 1989 en los talleres de IMPRENTA ALDINA, Rosell y Sordo Noriega, S. de R. L., Obrero Mundial núm. 201, Col. del Valle, 03100 México, D. F.

La edición consta de 500 ejemplares